Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Negyedik alkalom

1. *Mutassuk meg, hogy ha a G csoport k-tranzitívan hat egy n elemű halmazon, akkor $n(n-1)\dots(n-k+1)$ osztója G rendjének, és itt oszthatóság helyett akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha a hatás szigorúan k-tranzitív.*

2. *Milyen n és T esetén hat $\mathrm{Aff}(n,T)$ szigorúan 3-, illetve 2-tranzitívan a T^n halmazon?*

3. *Igazoljuk tetszőleges T test esetén, hogy $\mathrm{L}(T) \cong \mathrm{PGL}(2,T)$, és hogy $\mathrm{L}(T)$ szigorúan 3-tranzitívan hat a $T \cup \{\infty\}$ projektív egyenesen.*

4. *Igazoljuk, hogy ha H és K részcsoportok egy G csoportban, akkor a G hatása a H szerinti bal mellékosztályokon akkor és csak akkor ekvivalens a K szerinti bal mellékosztályokon való hatással, ha H és K konjugáltak G-ben.*

5. *Igazoljuk, hogy ha $G \leq S_X$ Frobenius-csoport, és H az $a \in X$ stabilizátora, akkor $g \in G - H$ esetén $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy a G csoportnak H ilyen tulajdonságú részcsoportja. Mutassuk meg, hogy akkor G hatása H bal mellékosztályain Frobenius-csoportot ad, melynek N magja az egységelemen kívül azokból az elemekből áll, melyek H egyetlen konjugáltjában sincsenek benne, a stabilizátorok pedig pontosan H konjugáltjai lesznek (ezeket a Frobenius-csoport* **komplementumainak** *nevezzük).*

6. *Legyen $G \leq S_X$ Frobenius-csoport, melynek magja $N \triangleleft G$, és az $a \in X$ pont stabilizátora H. Mutassuk meg, hogy G az N és a H szemidirekt szorzata. Igazoljuk azt is, hogy egyetlen olyan hatása létezik G-nek az N halmazon, ahol H elemei konjugálással, N elemei pedig balszorzással hatnak, és ez a hatás ekvivalens a G csoport X-en való hatásával.*

7. *Igazoljuk az alábbi csoportokról, hogy Frobenius-csoportok: S_3, D_{2n+1}, A_4, $\mathrm{Aff}(1,T)$, minden pq rendű nemkommutatív csoport (p, q prímek). Mi a mag és a komplementumok?*

8. *Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $N \rtimes_\varphi H$ szemidirekt szorzat olyan Frobenius-csoport legyen, melynek magja N, egyik komplementuma pedig H?*

9. *Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aff}(V) \cong V \rtimes \mathrm{GL}(V)$.*

10*. *Igazoljuk, hogy ha $G \leq S_n$, akkor $\Phi(G)$ nem lehet tranzitív.*

11. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges T test felett a $\mathrm{T}(n,T)$ csoport feloldható.*

12. *Jelölje I^{ij} azt az $n \times n$-es mátrixot, melyben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi nulla. Mutassuk meg, hogy $i < j < k$ esetén $I + I^{ij}$ és $I + I^{jk}$ kommutátora $I + I^{ik}$. Vezessük le ebből, hogy az $\mathrm{U}(n,T)$ csoport minden centrális lánca legalább n hosszúságú.*

13. *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathrm{SL}(n,T)$ részcsoport centralizátora $\mathrm{GL}(n,T)$-ben éppen a skalármátrixokból (azaz az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból) áll.*

14. *Igazoljuk, hogy $\mathrm{PSL}(2,2) \cong \mathrm{SL}(2,2) = \mathrm{GL}(2,2) \cong S_3$, és hogy $\mathrm{PSL}(2,3) \cong A_4$.*

15. *Igazoljuk, hogy egy 60 rendű egyszerű csoport van (így $\mathrm{PSL}(2,4) \cong \mathrm{PSL}(2,5) \cong A_5$).*

16. *Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{GL}(n,p)$ csoport p-Sylowja izomorf $\mathrm{U}(n,p)$-vel.*

17. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n elemű csoport, akkor beágyazható $\mathrm{GL}(n,p)$-be tetszőleges p esetén, és ha G egy p-csoport, akkor beágyazható $\mathrm{U}(n,p)$-be is.*