Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Harmadik alkalom

Egy G csoport **alsó centrális lánca** a $G = G^1 \geq G^2 \geq \ldots$ lánc, ahol $G^{i+1} = [G^i, G]$, **felső centrális lánca** pedig $\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots$, ahol $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$.

1. *Feloldhatók illetve nilpotensek-e az alábbi csoportok? Határozzuk meg a kommutátor-részcsoportjukat és a Frattini-részcsoportjukat:* $\mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Z}_2^2$, S_3, D_4, D_6, A_4, S_4, A_5.

2. *Igazoljuk, hogy ha* $|P| = p^3$ *(ahol* p *prím), akkor* $Z(P) = P' = \Phi(P)$*, és ez* p *rendű.*

3. *Mutassuk meg, hogy ha* R *egységelemes gyűrű, és* I *ideál* R*-ben, melyre* $I^k = 0$*, akkor az* $1 + x$ $(x \in I)$ *alakú elemek a szorzásra nézve nilpotens csoportot alkotnak.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha* N *és* K *karakterisztikus részcsoportok, akkor* $[N, K]$ *is az.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy feloldható csoportban minden minimális normálosztó* **elemi Abel-féle p-csoport**, *azaz izomorf* $\mathbb{Z}_p^n$*-nel valamilyen* p *prímre és* n *egészre.*

6. *Igazoljuk, hogy* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^n) \cong \mathrm{GL}(n, p)$*. Mi ennek a csoportnak a rendje?*

7. *Igazoljuk, hogy feloldható csoport maximális részcsoportjának indexe prímhatvány.*

8. *Igazoljuk az* $[x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1}$ *azonosságot, és ebből azt, hogy ha* K, L, N *normálosztók egy csoportban, akkor* $[K, LN] = [K, L][K, N]$.

9. *Az* $x \in G$ *elemet „nem-generátor"-nak nevezzük, ha minden generátorrendszerből elhagyható, azaz ha tetszőleges* $X \subseteq G$ *esetén* $\langle x, X\rangle = G \implies \langle X \rangle = G$*. Bizonyítsuk be, hogy* $\Phi(G)$ *pontosan a nem-generátorok halmaza.*

10*. *Legyen* P *véges* p*-csoport (*p *prím), és* $|P/\Phi(P)| = p^r$*. Igazoljuk, hogy* $P/\Phi(P)$ *elemi Abel-féle* p*-csoport, és* P *minden minimális generátorrendszere* r *elemű.*

11*. *Bizonyítsuk be, hogy ha* G *véges, akkor* $\Phi(G)$ *nilpotens.*

---

12. *Mutassuk meg, hogy a* G *csoport alsó és felső centális láncának elemei karakterisztikus részcsoportok; hogy* G *tetszőleges* $G = N_0 > N_1 > \cdots > N_k = \{e\}$ *centrális láncára igaz, hogy* $G^{i+1} \leq N_i \leq Z_{k-i}(G)$ *(ahol* $0 \leq i \leq k$*), és ezért* G *akkor és csak akkor nilpotens, ha az alsó centrális lánc leér az* $\{e\}$*-ig, akkor és csak akkor, ha a felső centrális lánc felér* G*-ig, és ebben az esetben az alsó és a felső centrális lánc hossza megegyezik.*

13. *Igazoljuk, hogy nilpotens csoportban minden normálosztó metszi a centrumot.*

14. *Legyen* A *(tartalmazásra) maximális egy* G *véges nilpotens csoport Abel-féle normálosztói között. Bizonyítsuk be, hogy* $A = C_G(A)$.

15. *Igaz-e, hogy* $(A \times B)' = A' \times B'$*?*

16. *Bizonyítsuk be, hogy a feloldhatóság bővítésre öröklődik, és hogy két feloldható normálosztó szorzata is feloldható.*

17. *Bizonyítsuk be, hogy a nilpotencia öröklődik részcsoportra, homomorf képre és véges direkt szorzatra, de bővítésre nem.*

18.** *Igazoljuk, hogy ha* G *véges,* $N \lhd G$*, és* $G/\Phi(N)$ *nilpotens, akkor* G *is az.*

19.** *Bizonyítsuk be, hogy két nilpotens normálosztó szorzata is nilpotens.*