Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második alkalom

1. *Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges G csoport belső automorfizmusai normálosztót alkotnak G automorfizmus-csoportjában.*

2. *A G csoport egy N részcsoportját* **karakterisztikus** *részcsoportnak nevezzük, ha N invariáns G összes automorfizmusára, azaz $g \in N$ és $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ esetén $\alpha(g) \in N$. Bizonyítsuk be a következő állításokat.*

a) *G minden karakterisztikus részcsoportja normálosztó G-ben.*

b) *Egy ciklikus csoport minden részcsoportja karakterisztikus.*

c) *Ha A (additívan írt) Abel-csoport, és n pozitív egész, akkor az $nA = \{na \mid a \in A\}$ és az $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$ részcsoportok karakterisztikusak.*

d) *A centrum mindig karakterisztikus részcsoport.*

e) *Ha G-ben egy Sylow részcsoport normálosztó, akkor karakterisztikus is.*

f) *Ha $N \triangleleft G$, akkor N normálosztói nem feltétlenül normálosztók G-ben (keressünk D_4-ben ellenpéldát).*

g) *Ha $N \triangleleft G$, akkor N minden karakterisztikus részcsoportja normálosztó G-ben.*

h) *Karakterisztikus részcsoport karakterisztikus részcsoportja az egész csoportnak karakterisztikus részcsoportja.*

3*. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G véges csoport* **karakterisztikusan egyszerű**, *azaz csak a két triviális karakterisztikus részcsoportja van, akkor G egymással izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata.*

4*. *Mely véges csoportoknak van másodrendű fixpontmentes automorfizmusa? (Egy automorfizmus fixpontmentes, ha csak az egységelemet viszi önmagába).*

5. *Izomorfak-e egy „ismert" csoporttal az alábbi szemidirekt szorzatok? A következő jelölést használjuk: $G = N \rtimes H$, ahol H részcsoport, N normálosztó G-ben, és $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ az a leképezés, melyre $\varphi(h)(n) = hnh^{-1}$.*

a) *$H = \mathbb{Z}_2^+$, $N = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(1)$ minden elemet invertál.*

b) *$H = \mathbb{Z}_2^+$, $N = \{e, a, b, c\}$ a Klein-csoport, $\varphi(1)$ az (ab) transzpozíció.*

c) *$H = \mathbb{Z}_3^+$, $N = \{e, a, b, c\}$ a Klein-csoport, $\varphi(1)$ az (abc) ciklus.*

d) *$H = D_3$, $N = \{e, a, b, c\}$ a Klein-csoport, $\varphi(t) = (ab)$, $\varphi(f) = (abc)$.*

e) *$H = D_3$, $N = \{e, a, b, c\}$ a Klein-csoport, $\varphi(t) = (ab)$, $\varphi(f) = id$.*

f) *$H = \mathbb{Z}_4^+$, $N = \mathbb{Z}_3^+$, $\varphi(1) = (12)$.*

6. *Igazoljuk, hogy minden $G = N \rtimes H$ szemidirekt szorzat tényleg csoport, amelyben az N-nek megfelelő N_0 részhalmaz normálosztó, a H-nak megfelelő H_0 részhalmaz részcsoport, H_0 úgy hat konjugálással N_0-on, ahogy a φ leképezés előírja, $G = N_0H_0$, és $G/N_0 \cong H_0$.*

7*. *Bizonyítsuk be, hogy ha $p \neq q$ prímek, akkor bármely két nemkommutatív pq rendű csoport izomorf.*

8. *Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \triangleleft G$. Igazoljuk, hogy $P \cap N$ (egy) p-Sylowja N-nek, és NP/N (egy) p-Sylowja G/N-nek.*

9. *Bizonyítsuk be, hogy a feloldható csoportok osztálya zárt a részcsoportképzésre, a faktorcsoport képzésére, és a véges sok tényezős direkt szorzat képzésére.*