Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Első alkalom

1. *Hasson G az X halmazon, és legyen $\varphi_g(x) = g * x$. Bizonyítsuk be, hogy $g \mapsto \varphi_g$ homomorfizmusa G-nek S_X-be. Ennek a magját a hatás magjának nevezzük.*

2. *Legyen $H \leq G$, és definiáljuk G hatását a H szerinti bal mellékosztályokon a $g*(aH) = gaH$ képlettel. Igazoljuk, hogy ennek a hatásnak a magja a H konjugáltjainak a metszete.*

3. *Tegyük fel, hogy a G egyszerű csoportban van n-indexű részcsoport. Bizonyítsuk be, hogy G izomorf az S_n egy részcsoportjával.*

4. *Igazoljuk, hogy $N_G(H)$ a legnagyobb olyan részcsoport, amiben H normálosztó.*

5. *Melyik ismert csoporttal izomorf az S_4 csoport 2-Sylow részcsoportja?*

6. *Határozzuk meg az alábbi csoportok Sylow-részcsoportjainak a számát: S_3, D_n, S_4, A_5.*

7. *Igazoljuk, hogy nincs 200, 204, 260, 56 rendű egyszerű csoport.*

8. *Számítsuk ki, hogy egy véges csoport Cayley-reprezentációjában mely elemeknek lesz páratlan permutáció a képe. Mutassuk meg, hogy ha a G csoport 2-Sylow részcsoportja ciklikus (speciálisan ha G rendje $4k + 2$ alakú), akkor G nem lehet egyszerű.*

9*. *Igazoljuk, hogy nincs 120, 180**, 312, 616, 1960 rendű egyszerű csoport.*

10. *[Frattini-elv] Legyen $H \lhd G$ és P egy p-Sylowja H-nak. Igazoljuk, hogy $G = HN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részcsoportját.*

11. *Tegyük fel, hogy a $K \leq G$ részcsoport tartalmazza G egy p-Sylowjának normalizátorát. Mutassuk meg, hogy $N_G(K) = K$, és hogy $|G : K| \equiv 1$ (p).*

12*. *Igazoljuk, hogy ha p, q, r páronként különböző prímek, akkor nincs pqr rendű egyszerű csoport.*

13*. *Igazoljuk, hogy ha p prím, akkor nincs $4p^\alpha$ rendű egyszerű csoport.*

14*. *Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek, akkor nincs p^2q rendű egyszerű csoport.*

15.** *Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek, és $\alpha > 0$, akkor nincs $p^\alpha q$ rendű egyszerű csoport.*

16. *Legyen $X \subseteq G$. Mutassuk meg, hogy $C_G(X) \lhd N_G(X)$, és ha X részcsoport, akkor $C_G(X)/N_G(X)$ beágyazható X automorfizmuscsoportjába.*

17. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, Q, S_3 csoportok automorfizmuscsoportját.*

18. *Legyenek G és H véges csoportok. Mutassuk meg, hogy a $(g, h) \in G \times H$ rendje a $|g|$ és a $|h|$ legkisebb közös többszöröse. Vezessük le ebből, hogy $G \times H$ akkor és csak akkor ciklikus, ha G is, H is az,* **és** *$(|G|, |H|) = 1$. Mi a helyzet, ha G és H nem feltétlenül véges?*

19. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoportjuk direkt szorzatára, és igenlő válasz esetén adjunk is meg egy-egy ilyen felbontást: $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, D_3, D_4, D_6, Q, A_4, S_5.*

20. *A véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.*

21. *Igazoljuk, hogy ha G és H csoportok, akkor $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.*