Alkalmazott matematikus szak, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldásvázlatok, eredmények

1. Az eredmény $-\theta^2$.

2. A minimálpolinom osztója x^5-7-nek, mert ez egy olyan polinom $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$ fölött, melynek $\sqrt[5]{7}$ gyöke (1 pont). Ahhoz, hogy belássuk, hogy ez maga a minimálpolinom, elég megmutatni, hogy $|\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})(\sqrt[5]{7}) : \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})| = 5$ (2 pont). Ez következik abból, hogy $\sqrt[5]{7}$ és $\sqrt[7]{5}$ fokai relatív prímek $\mathbb{Q}$ fölött (3 pont).

3. Nagyon nem izomorf. Például mert a Gauss-egészek gyűrűje nullosztómentes (hiszen komplex számokból áll), míg $\mathbb{Z}[x]/(2x)$ nem az, hiszen $2+(2x)$ és $x+(2x)$ szorzata nulla. Másik indok: az egységelem ellentettjéből az egyik gyűrűben vonható négyzetgyök, a másikban nem.

4. Mivel minden ideál részcsoport, és ciklikus csoportnak a rend minden osztójához pontosan egy ilyen rendű részcsoportja van, továbbá mivel ezek a részcsoportok nyilván ideálok is lesznek, a keresett háló izomorf a 27 osztóinak a hálójával, ami egy négyelemű lánc (3 pont). Ennek kongruenciahálója a kocka (3 pont).

5. $\varepsilon = (1+i)/\sqrt{2} = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$, azaz nyolcadik primitív egységgyök, aminek a minimálpolinomja $\Phi_8(x) = x^4+1$, tehát a bővítés negyedfokú (2 pont). Ez közvetlenül is kiszámolható, ha belátjuk, hogy ez a test valójában $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Emiatt kiszámolható, hogy a Galois-csoport a Klein-csoport, és így összesen 5 közbülső test van. De nem kell számolni sem: ez már abból is következik, hogy ez egy negyedfokú normális bővítés (hiszen x^4+1 gyökei ε hatványai), és így a Galois-csoport vagy Klein, vagy ciklikus, tehát vagy 5, vagy 3 közbülső test van, de utóbbi nem lehet, mert $\mathbb{Q}(i)$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nemtriviális közbülső testek (tehát legalább négy van).

6. Legyen $A = x+1+(x^3+x^2+1)$, $N = 0+(x^3+x^2+1)$ és $E = 1+(x^3+x^2+1)$. Ekkor $A^2 = x^2+1+(x^3+x^2+1)$ és $A^3 = x^3+x^2+x+1+(x^3+x^2+1) = x+(x^3+x^2+1)$. Tehát $A^3+A+E = N$. Vagyis A gyöke az Ex^3+Ex+E polinomnak, ami irreduciblilis $\{N, E\}$ fölött, hiszen harmadfokú, és nincs gyöke. Ez tehát a minimálpolinom.