Alkalmazott matematikus szak, második évfolyam, első félév
Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Nincs. $1892 = 2^2 \cdot 11 \cdot 43$, a 11-Sylowok száma tehát osztója $4 * 43$-nak, és kongruens eggyel modulo 11. Ez a szám azonban csak az 1 lehet. Tehát az egyetlen 11-Sylow részcsoport normálosztó.

2. Legyen G a keresett csoport. A négyzet egyik csúcsa legyen A. Ekkor A a négyzet csúcsaiba mehet csak (mert ezek a negyedfokú pontok). Az A stabilizátora tehát $|G|/4$ elemszámú. Ha A fix, akkor a négyzet A-val szomszédos csúcsai helyet cserélhetnek. Ha ezek is fixen maradnak, akkor mindegyik kis ötszög még tükröződhet arra az átlójára, amely a négyzethez ragasztott csúcsból indul ki. Végülis $|G| = 4 \cdot 2 \cdot 2^4 = 128$.

3. Például $g = (123)$ jó (0 pont), mert $(123)(12345) = (13452)$ (1 pont), és ez nem írható fel $(12345)^i(123)$ alakban. Ezt vagy az $i = 0, 1, 2, 3, 4$ esetek végigszámolásával igazolhatjuk, vagy úgy, hogy észrevesszük, hogy $(13452)(123)^{-1} = (14523)$ nem hatványa (12345)-nek.

4. Az $(f^6)^2 = f^4$ már N-ben van, de f^6 még nincs, ezért a keresett rend 2.

5. Mivel $|A_5| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a 2-Sylow rendje 4 (1 pont). Négyelemű csoport csak kettő van, tehát csak azt kell eldönteni, van-e negyedrendű elem (1 pont). De A_5-ben nincs negyedrendű elem, mert az ötelemű halmazon ez csak négyesciklus lehetne, ami páratlan permutáció (3 pont). Ezért a 2-Sylow a Klein-csoporttal izomorf (1 pont). *Második megoldás:* Vegyük észre, hogy $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ a Klein-csoporttal izomorf négyelemű részcsoport.

6. Legyen $f = (1234)$ és $t = (13)(56)$. Ekkor $tft = (1432) = f^{-1}$, és így a keresett részcsoport D_4-gyel izomorf (hiszen az f rendje 4, a t rendje 2, és számolni ugyanúgy kell velük, mint D_4-ben).