Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Nyolcadik alkalom

Tegyük fel, hogy K részteste L-nek, és $\alpha \in L$. Keressük meg azokat a $K[x]$-beli polinomokat, melyeknek α gyöke. Ha ilyen nincs más, csak a nullapolinom, akkor α *transzcendens* K fölött. Egyébként, azaz ha α *algebrai* K fölött, akkor egyértelműen létezik egy olyan normált $m_\alpha \in K[x]$ polinom, hogy a keresett polinomok éppen az m_α többszörösei. Az m_α neve az α *minimálpolinomja.* A minimálpolinomot úgy lehet megtalálni, hogy olyan normált, K fölött **irreducibilis** polinomot keresünk, melynek α gyöke. **Ismétlés:** az első félévben tanult módszerek az irreducibilitás eldöntésére:

- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis egy K test fölött, ha K-ban nincs gyöke (speciálisan $\mathbb{Q}$ felett használhatjuk a racionális gyöktesztet).
- A Schönemann-Eisenstein kritérium ($\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás egész együtthatósra).
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.
- f akkor és csak akkor irreducibilis egy K test felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in K$) az.
- Bontsuk fel a polinomot egy bővebb testben, és használjuk a felbontás egyértelműségét.

1. *Írjuk fel az $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ szám reciprokát $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ alakban (ahol a,b,c racionális számok).*

2. *Legyen θ az x^3+3x+1 polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a $\theta^5+2\theta^3$ és a $\theta/(\theta-3)$ számokat $a+b\theta+c\theta^2$ alakban, ahol $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Mi a θ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?*

3. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test felett: π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, egy primitív n-edik egységgyök, ahol $n=2,3,4,5,6$, illetve tetszőleges prímszám.*

4. *Legyen L a négyelemű test. Írjuk fel az összes elem minimálpolinomját a kételemű résztest fölött.*

Legyen K részteste az L testnek, és $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in L$. Ekkor $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ az L legszűkebb olyan részteste, amely K-t és az $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ elemeket tartalmazza, azaz a K és $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ által **generált** résztest. Ennek a definíciónak az alapján részletesen belátjuk, hogy ha $\alpha,\beta \in L$, akkor $K(\alpha)(\beta) = K(\alpha,\beta)$. Megmutatjuk, hogy mindkét oldal tartalmazza a másikat. A $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza a β elemet, és a $K(\alpha)$ testet. A $K(\alpha)$ test tartalmazza az α elemet, és a K testet. Ezért $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza K-t is, és az α, β elemeket is. Mivel $K(\alpha,\beta)$ a legszűkebb az ilyen tulajdonságú testek közül, azért $K(\alpha,\beta) \subseteq K(\alpha)(\beta)$. A másik tartalmazás belátásához vizsgáljuk a $K(\alpha,\beta)$ testet. Ez tartalmazza az α elemet, és a K testet, és mivel $K(\alpha)$ a legszűkebb ilyen test, $K(\alpha) \subseteq K(\alpha,\beta)$. De $K(\alpha,\beta)$ tartalmazza a β elemet is, és így a legszűkebb olyan testet is, ami a β elemet és a $K(\alpha)$ testet tartalmazza, ami definíció szerint $K(\alpha)(\beta)$.

5. *Igaz-e, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2}+1)$?*

6. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.*

7. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.*

8. *Igaz-e, hogy $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$?*

9. *A fenti bizonyítás módszerével igazoljuk, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor $K(\alpha,\beta) = K(\alpha,\alpha\beta)$.*