Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Hetedik alkalom

1. *Keressünk $\mathbb{R}[x]$-ben olyan részgyűrűt, ami nem ideál.*

2. *Főideál-e $\mathbb{Z}[x]$-ben $(3, x)$, $(x+1,\ x+2)$ illetve $(2x+2,\ x+4)$?*

3. *Készítsük el az alábbi gyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. A $2\mathbb{Z}$ a páros számok gyűrűjét, a $2\mathbb{Z}_{16}$ pedig a $\mathbb{Z}_{16}$ gyűrű $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ részgyűrűjét jelöli.*

$$\mathbb{Z}_8/\{0,4\}, \quad \mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}, \quad 2\mathbb{Z}/(8), \quad 2\mathbb{Z}_{16}/(8), \quad \mathbb{Z}/(4), \quad 4\mathbb{Z}/(16), \quad \mathbb{Z}[x]/(4,x)\,.$$

4. *Tekintsük azt az $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ izomorfizmust, amelyet úgy kapunk, hogy a homomorfizmus-tételt alkalmazzuk az $f \mapsto f(i)$ homomorfizmusra. Mi az $x+1$, x^2, $ax+b$ polinomok maradékosztályainak a képe?*

5. *Izomorfak-e az alábbi gyűrűk? Itt $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűje.*
a) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2)$ *és* $\mathbb{C}$.
b) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ *és* $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
c) $\mathbb{G}/(5)$ *és* $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$.
d) $\mathbb{G}/(3)$ *és a kilenc elemű test.*

6. *A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ gyűrűben mi az $x+(x^2+x+1)$ inverze?*

7. *Legyen $L=\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$. Határozzuk meg az L elemszámát, írjuk fel a műveleti tábláit, igazoljuk, hogy testet kaptunk, keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{E, O\}$ résztestet, és adjuk meg L-ben az Ex^2+Ex+E polinom gyökeit. Oldjuk meg az analóg feladatot x^3+x+1-re is. Keressünk ezzel a módszerrel kilenc elemű testet.*

8. *Mutassuk meg, hogy az alábbi megfeleltetés gyűrű-izomorfizmus a kvaterniótest, és a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixgyűrű egy részgyűrűje között. Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy a kvaterniószorzás asszociatív és disztributív.*

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d\in\mathbb{R}).$$

9. *Igazoljuk, hogy ha R gyűrű, akkor az $(r,n)(s,m)=(rs+rm+sn, nm)$ szorzásra nézve az $R^+\times\mathbb{Z}^+$ csoport egységelemes gyűrű, mely tartalmaz R-rel izomorf részgyűrűt.*

---

10. *Legyen R azoknak a (racionális) törteknek a gyűrűje, melyek nevezője páratlan. Határozzuk meg az egységeket, a felbonthatatlanokat és a prímeket. Hány prím van asszociáltság erejéig? Igaz-e az alaptétel? Mik az ideálok? Euklideszi gyűrűt kaptunk-e? Konstruáljunk olyan alaptételes gyűrűt, melyben asszociáltság erejéig hat darab prím van.*

11*. *Bizonyítsuk be, hogy ha R alaptételes gyűrű, ami nem test, akkor végtelen sok prím van benne (most az asszociált prímeket is különbözőnek tekintjük).*

12*. *Legyen K test, és jelölje $K^\circ[x]$ az olyan K feletti „polinomoknak” a gyűrűjét, amelyben az x kitevőjeként nemcsak nemnegatív egészek, hanem tetszőleges nemnegatív racionális számok szerepelhetnek. Igazoljuk, hogy nullosztómentes gyűrűt kaptunk, amelyben minden irreducibilis elem prím. Igaz-e a számelmélet alaptételének létezési illetve egyértelműségi állítása? Létezik-e felbonthatatlan elem $\mathbb{C}^\circ[x]$-ben? És $\mathbb{Q}^\circ[x]$-ben?*