Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Hatodik alkalom

1. *Igazoljuk, hogy $N_G(H)$ a legnagyobb olyan részcsoport, amiben H normálosztó. Határozzuk meg a D_4 csoportban a $\{t, e\}$ részcsoport normalizátorát, valamint az S_4 csoportban az (123) által generált részcsoport normalizátorát.*

2. *Melyik ismert csoporttal izomorfak az alábbi csoportok Sylow részcsoportjai: $\mathbb{Z}_{12}^+$, S_3, D_6, $\mathbb{Z}_2^+ \times A_4$, S_4?*

3. *Határozzuk meg az alábbi csoportok p-Sylow-részcsoportjainak a számát minden p prímre: S_3, D_6, A_4, S_4, A_5.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy G véges csoportban pontosan akkor van csak egy darab p-Sylow részcsoport, ha ez normálosztó G-ben.*

5. *Igazoljuk, hogy nincs 200, 204, 260, 56 rendű egyszerű csoport.*

6. *Igazoljuk, hogy ha p és q különböző prímek, akkor nincs pq rendű egyszerű csoport.*

7. *Legyen $X \subseteq G$. Mutassuk meg, hogy $C_G(X) \lhd N_G(X)$.*

8. *Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \lhd G$. Igazoljuk, hogy $P \cap N$ (egy) p-Sylowja N-nek, és NP/N (egy) p-Sylowja G/N-nek.*

9*. *Számítsuk ki, hogy egy véges csoport Cayley-reprezentációjában mely elemeknek lesz páratlan permutáció a képe. Mutassuk meg, hogy ha a G csoport 2-Sylow részcsoportja ciklikus (speciálisan ha G rendje $4k + 2$ alakú), akkor G nem lehet egyszerű.*

10*. *[Frattini-elv] Legyen $H \lhd G$ és P egy p-Sylowja H-nak. Igazoljuk, hogy $G = HN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részcsoportját.*

11. *Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit, és döntsük el, izomorfak-e valamelyik „ismert” csoporttal.*

a) $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.
b) $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.
c) $\langle a \mid a^5 = 1,\ a^7 = 1 \rangle$.
d) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ ab = ba \rangle$.
e) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^3 = 1,\ ab = ba \rangle$.
f) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^5 = 1,\ aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.
g) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^5 = 1,\ aba^{-1} = b^2 \rangle$.
h) $\langle t, f \mid t^2 = 1,\ f^n = 1,\ tft = f^{-1} \rangle$.
i) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^3 = 1 \rangle$.
j) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^4 = 1 \rangle$.
k) $\langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.
l) $\langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1,\ bab^{-1} = a^3 \rangle$.
m) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1,\ ab = ba,\ cac^{-1} = b \rangle$.
n) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$.
o) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^4 = 1 \rangle$.
p) $\langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1,\ ba = ab^3 \rangle$.
q) $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ ac = ca,\ bc = cb,\ ab = ba^3 \rangle$.