Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Ötödik alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi $G \leq S_X$ permutációcsoportokban az orbitokat és a stabilizátorokat.*

a) *X a sík pontjai, G az origó körüli forgatások csoportja.*
b) *X a sík pontjai, G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.*
c) *X egy szabályos n-szög csúcsai, G az ezt önmagába vivő egybevágóságok csoportja.*
d) *X egy szabályos n-szög csúcsai, G ezt az n-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportjának egy adott csúcsot fixáló elemei.*
e) *$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$.*
f) *X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gx$, a G csoport az f_g permutációkból áll.*
g) *X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gxg^{-1}$, a G csoport az f_g permutációkból áll (itt csak a stabilizátorok kellenek).*

2. *Határozzuk meg az alábbi alakzatok szimmetriáinak számát.*

a) *Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.*
b) *Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.*
c) *Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.*

3. *Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek rendre pontosan 2, 4, illetve 3 szimmetriája van. Rajzoljunk olyat is, aminek csak 1 van (az identitás).*

4. *Igazoljuk, hogy ha $A \leq S_n$ Abel-féle és tranzitív, akkor $|A| = n$.*

5. *Legyen $G \leq S_X$ és $x, y \in G$. Mutassuk meg, hogy ha $g(x) = y$, és x stabilizátora H, akkor y stabilizátora gHg^{-1}.*

6. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoportjuk direkt szorzatára, és igenlő válasz esetén adjunk is meg egy-egy ilyen felbontást: $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, D_3, D_4, Q, A_4, S_5.*

7. *Hogyan fejezhető ki a direkt szorzat egy elemének a rendje a komponenseinek rendjei segítségével?*

8. *Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.*

9. *A véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.*

10. *Álljon G az S_8 azon elemeiből, melyek az $\{1, 2, 3, 4\}$ részhalmazt önmagába képzik. Mutassuk meg, hogy ez részcsoport, de nem normálosztó S_8-ban. Igaz-e, hogy $G \cong S_4 \times S_4$?*

11. *Bizonyítsuk be, hogy $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2^+$.*

12. *Hányféleképpen bontható direkt szorzatra $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$?*

13. *Igazoljuk, hogy ha G és H csoportok, akkor $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.*

14. *Adjuk meg az $S_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ csoport egy kompozícióláncát, és kompozíciófaktorait.*

15*. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje $2p$, ahol p páratlan prím, akkor G vagy ciklikus, vagy izomorf a D_p diédercsoporttal.*