Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Negyedik alkalom

1. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük:* $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q *(a kvaterniócsoport),* $GL(2,2)$.

2*. *Bizonyítsuk be, hogy ha* G *hatelemű csoport, akkor* $G \cong \mathbb{Z}_6^+$ *vagy* $G \cong S_3$.

3. *Határozzuk meg az I/7. feladatban szereplő, valamint az alábbi homomorfizmusok magját és képét.*

a) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az* f *előjele (azaz* ± 1*).*

b) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(a)$ *az* a *maradéka mod* n.

c) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha* x *forgatás,* 1 *ha* x *tengelyes tükrözés.*

4. *A homomorfizmus-tétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*

a) $\mathbb{C}^\times/\text{egységkör} \cong \text{pozitív valós számok a szorzásra}$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktorcsoportnak az elemei?*

b) $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \cong \text{komplex egységkör a szorzásra}$.

c) $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.

d) $\mathbb{Z}^+/n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

5. *Állapítsuk meg az alábbi faktorcsoportok elemeinek rendjeit, és írjuk fel a szorzástábláikat:* $D_4/\{e, f^2\}$, $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. *A kapott faktorok izomorfak-e valamilyen ismert csoporttal?*

6. *Állapítsuk meg, milyen ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok:*

a) $D_8/\{e, f^2, f^4, f^6\}$.

b) $A_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$.

c) $D_n/\{e, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$.

d) $\mathbb{Z}_{16}^\times/\{1, 9\}$.

7*. *Van-e a kocka szimmetriacsoportjának* S_4*-gyel izomorf részcsoportja?*

8. *Állapítsuk meg az alább felsorolt csoportok konjugált osztályait, normálosztóit, centrumát, és azt, hogy a csoport feloldható-e:* D_3, D_4, D_5, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}(2,2)$.

9. *Legyen* N *kételemű normálosztó a* G *csoportban. Igazoljuk, hogy* $N \leq Z(G)$.

10. *Mutassuk meg, hogy ha egy* G *csoport azon elemei, melyeknek a négyzete az egységelem, részcsoportot alkotnak, akkor ez egyben normálosztó is. Igaz-e mindig, hogy ez a részhalmaz részcsoport?*

11. *Igazoljuk, hogy* $GL(n, T)$ *centruma az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*

12*. *Legyen* $p > 2$ *prím. A* $\mathrm{GL}(3, p)$ *csoportban tekintsük azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csupa 0, a főátlójában pedig csupa 1 áll. Igazoljuk, hogy egy* p^3 *elemszámú* G *részcsoportot kaptunk, mely nem kommutatív, és minden egységtől különböző eleme* p *rendű. Határozzuk meg ennek a csoportnak a centrumát.*

13.** *Mutassuk meg, hogy ha* P *véges* p*-csoport valamilyen* p *prímre, akkor minden* p *indexű részcsoportja normálosztó.*