Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Harmadik alkalom

1. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_6^+$ és a $\mathbb{Z}_{12}^+$ csoportok összes részcsoportját.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha G véges ciklikus csoport, akkor a d rendű részcsoportok száma 1, ha d osztója a csoport rendjének, és nulla egyébként.*

3. *Határozzuk meg $\mathbb{Z}^+$ összes részcsoportját. Mi ennek az állításnak a kapcsolata azzal, hogy $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű?*

4. *Határozzuk meg a Klein-csoport összes részcsoportját, és a szerintük vett mellékosztályokat.*

5. *Legyen $n\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$ értékét.*

6. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3 csoport összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel S_3-ban az $\{id, (12)\}$ részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt.*

7. *Határozzuk meg a G csoportban az X által generált részcsoportot:*
a) $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$.
b) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.
c) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \{2, 3\}$.
d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, X *a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*
e) $G = S_n$, $X = \{(12), (12\ldots n)\}$.

8. *Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2\rangle$ részcsoportot.*

9. *Normálosztó-e a $H \le G$ részcsoport a következő esetekben?*
a) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = 3\mathbb{Z}^+$.
b) $G = S_3$, $H = \{id, (12)\}$.
c) $G = S_3$, $H = \{id, (123), (132)\}$.
d) $G = S_n$, $H = A_n$.
e) $G = S_4$, $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
f) $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = e\}$.
g) $G = D_6$, $H = \{e, f^3, t, tf^3\}$.
h) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *az 1 determinánsú mátrixok halmaza.*
i) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *a diagonális mátrixok halmaza.*
j) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *az egységmátrix nem nulla skalárszorosainak a halmaza.*
k) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *a felső háromszögmátrixok halmaza.*

10. *Igazoljuk, hogy ha $N \triangleleft G$ és $H \le G$, akkor $N \cap H \triangleleft H$.*

11. *Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.*

12. *Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű. Mennyi lehet a metszet indexe legfeljebb?*

13**. *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*