Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második alkalom

1. *Határozzuk meg $\mathbb{Z}_n^+$ és $\mathbb{Z}_n^\times$ elemeinek a rendjeit, ha $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24$.*

2. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és rendjét. Tegyük meg ugyanezt a 'hátulról előre' permutációval is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

3. *Végezzük el az alábbi műveleteket (és adjuk meg az eredmény ciklusfelbontását).*

$$(1234)(35)(1432)(35) = ? \qquad (12345)^{-1}(234)(12345) = ? \qquad [(12)(23)(34)]^{1998} = ?$$

4. *Bizonyítsuk be az $(x_1x_2 \ldots x_k) = (x_1x_k)(x_1x_{k-1}) \ldots (x_1x_3)(x_1x_2)$ összefüggést. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció (=2 hosszú ciklus) szorzataként.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy az S_n csoport minden eleme felírható egy olyan soktényezős szorzat alakjában, melynek minden tényezője (12) vagy $(12\ldots n)$.*

6. *Adjuk meg S_n összes olyan elemét, mely felcserélhető az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal.*

7*. *Legyenek f, g, h elemei az S_n csoportnak.*
- a) *Mutassuk meg, hogy g és $f^{-1}gf$ diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik.*
- b) *Bizonyítsuk be, hogy ha g és h diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, akkor van olyan f, hogy $h = f^{-1}gf$.*

8. *Legyen f a D_n diédercsoportban egy $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy D_n minden eleme egyértelműen felírható f^i vagy tf^i alakban, ahol $0 \le i < n$. Igazoljuk azt is, hogy $f^it = tf^{-i}$ minden i egészre.*

9. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha g egy n-edrendű eleme egy G csoportnak (n véges), akkor tetszőleges k egészre g^k rendje $n/(n,k)$.*

11. *Igazoljuk, hogy minden nem egyelemű véges csoportban van prímrendű elem.*

12. *Mi lesz egy ciklikus csoportban az elemek rendje? Melyik rend hányszor fordul elő?*

13. *Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?*

14. *Mutassuk meg, hogy ha $|g|$ és $|h|$ relatív prímek, és $gh = hg$, akkor $|gh| = |g||h|$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

15. *Legyen G csoport, H részcsoportja G-nek és $g \in G$. Mutassuk meg, hogy a $g^{-1}Hg$ komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint H rendje.*

16. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok egy G csoportban, akkor AB akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.*

17*. *Igazoljuk, hogy $|G|$ pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.*