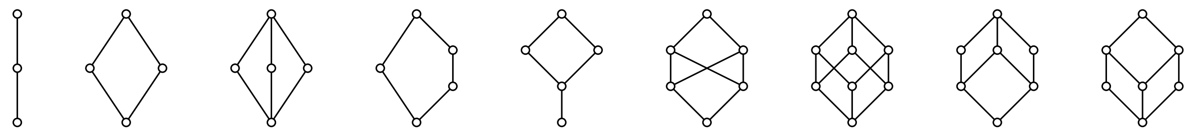
Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Tizenkettedik alkalom

1. *Döntsük el az alábbi részben rendezett halmazokról, hogy hálók-e, és ha igen, akkor disztributívak illetve modulárisak-e. Határozzuk meg ezeknek a hálóknak a kongruenciáit és részhálóit, és rajzoljuk le a kongruenciahálójukat és a részháló-hálójukat. Melyek lesznek komplementumosak, egyszerűek, illetve szubdirekt irreducibilisek? Keressük meg a metszet- illetve egyesítés-irreducibilis elemeket. Adjuk meg a második hálónak az elsőbe menő rendezéstartó leképezéseit, és válogassuk ki ezek közül a háló-homomorfizmusokat. Mindegyik lerajzolt hálóban keressünk minimális elemszámú generátorrendszert.*



2. *Vezessük le mindkét disztributív szabályból a másikat, és ezekből a moduláris szabályt.*

3. *Mutassuk meg, hogy egy háló-kongruencia minden osztálya konvex részháló.*

4. *Mutassuk meg, hogy egy csoport normálosztóhálója mindig moduláris, de nem feltétlenül disztributív, a részcsoporthálója pedig nem is biztos, hogy moduláris.*

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$. Az A *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű; *torziómentes,* ha csak a 0 véges rendű; *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ néhány példányának direkt összegével izomorf; *osztható*, ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jelöli a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportját a szorzásra (p prím).

5. *Számítsuk ki a* $\mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Hom}(B, A)$, $A \otimes B$ *Abel-csoportokat, ha* (A, B) *rendre* $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$; $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ *(mint* $\mathbb{Z}$*-modulusok).*

6. *Legyen* V *a sík, mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér. Írjuk fel* $V \otimes V$ *alábbi elemeit a lehető legrövidebb alakban (azaz minél kevesebb tenzor összegeként).*

a) $(1, 0) \otimes (2, 4) + (2, 0) \otimes (2, 4) + (3, 0) \otimes (1, 2)$.
b) $(1, 0) \otimes (1, 0) + (1, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0) + (0, 1) \otimes (0, 1)$.
c) $(1, 0) \otimes (2, 2) + (1, 2) \otimes (2, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0)$.

7. *Igaz-e:*

a) Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.
b) Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.
c) Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.
d) Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.
e) Ha A *tetszőleges Abel-csoport, akkor* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

8. *Számítsuk ki* $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ *esetén* $\mathrm{Hom}(A, \varphi)$*-t,* $\mathrm{Hom}(\varphi, A)$*-t és* $A \otimes \varphi$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze* φ *és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*

a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az* n*-szeresét rendeli.*
b) $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$*, az* n*-nel szorzás.*
c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ *a mod* n *vett maradék képzése.*
d) φ a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *beágyazás.*