Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Tizenegyedik alkalom

1. *Az alábbi szerkesztési feladatok mindegyikében határozzuk meg a K alaptestet, a $K(\alpha)$ bővítés fokát K felett, az α minimálpolinomja felbontási testének fokát K felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.*

a) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
b) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[4]{2}$.
c) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[6]{2}$.
d) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
e) *Adott* $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$, *a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.*

2. *Szerkeszthető-e a háromszög, ha adott két oldalának és az egyikhez tartozó szögfelezőnek a hossza? Válaszoljunk az alábbiak megoldásával. Jelölje (a szokásos módon) az oldalakat* a, b, c, *a hozzájuk tartozó szögfelezőket* f_a, f_b, f_c, *a szemköztes szögeket* α, β, γ.

a) *Mutassuk meg, hogy* $f_a = (2bc\cos(\alpha/2))/(b+c)$.
b) *Mutassuk meg, hogy* $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$.
c) *Vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor* $a = 1$, $b = 1$, $f_a = 1$ *(elég belátni, hogy ez nem szerkeszthető). Fejezzük ki ebben az esetben* $\cos\alpha$*-t az oldalak segítségével.*
d) *A* c*-re kapott egyenletből milyen érték adódik* c *fokára* $\mathbb{Q}$ *felett?*

3. *Határozzuk meg az* $x^{2^2} - x$ *polinom felbontási testét* $\mathbb{Z}_2$ *felett, és a kapott test Galois-csoportját a saját prímteste fölött. Tegyük meg ugyanezt az* $x^{2^3} - x$ *polinommal is.*

4. *Határozzuk meg az* $i + j + k$ *kvaternió inverzét, majd adjuk meg az* $x^2 - 1$ *és az* $x^2 + 1$ *polinomok összes gyökeit a kvaterniótestben.*

5. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel feltételei mind szükségesek, sőt adjunk meg olyan példákat, amelyek azt mutatják, hogy*

a) $\mathbb{R}$ *felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami nem test;*
b) $\mathbb{R}$ *felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami test, de nem a tételben felsorolt algebrák valamelyike;*
c) $\mathbb{R}$ *felett van véges dimenziós, nem nullosztómentes algebra (ami tehát nem test);*
d) *alkalmas test felett van akárhány, de véges dimenziós nullosztómentes algebra.*

6. *Legyen* V *a sík, mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér, és* T *az* $y = x$ *egyenesre való tükrözés. Határozzuk meg a* T *által generált ideált* $\mathrm{Hom}(V)$*-ben.*

7. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}_{16}$ *gyűrű legnagyobb nilpotens ideálját. Milyen* n *pozitív egészekre lesz* $\mathbb{Z}_n$ *féligegyszerű? Adjuk meg ebben az esetben a Wedderburn-Artin felbontást.*

8. *Legyen* G *rendre a* $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2^2$, D_4, Q *csoport. Készítsük el a* $\mathbb{C}$ *feletti csoportalgebrát, és bontsuk fel a Wedderburn-Artin tétel szerint.*

9. *Igazoljuk, hogy az alábbi* R*-modulusok egyszerűek, adjuk meg az endomorfizmus-gyűrűjüket (ami a Schur-lemma szerint test), és az efeletti dimenziójukat.*

a) $\mathbb{Z}_p$ *a* $\mathbb{Z}$ *felett.*
b) $\mathbb{R}^2$ *az* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *felett, ahol mátrixot vektorral a szokásos módon szorzunk.*
c) *A kvaterniótest, mint önmaga feletti modulus.*