Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Tizedik alkalom

A $K \leq L (\leq \mathbb{C})$ véges bővítés *normális*, ha minden K felett irreducibilis $f \in K[x]$ polinomra igaz, hogy vagy nincs gyöke L-ben, vagy az „összes" gyöke L-ben van, azaz f elsőfokú tényezőkre bomlik L felett. Normális bővítést kapunk például, ha $K \subseteq \mathbb{C}$-t egy $p \in K[x]$ polinom *összes* komplex gyökével bővítjük. Az így kapott testet a *p felbontási testének* nevezzük K felett. A normális bővítések azért fontosak, mert ilyenkor a $K \leq T \leq L$ *közbülső testek* a Galois-elmélet segítségével kiszámíthatók a következőképpen.

A $K \leq L$ bővítés szimmetriája (relatív automorfizmusa) egy olyan izomorfizmusa L-nek önmagára, melynél K összes eleme fixen marad. E szimmetriák a kompozícióra nézve a bővítés G Galois-csoportját alkotják. Ha $H \leq G$ (H részcsoportja G-nek), akkor legyen T azon L-beli elemek halmaza, melyek H minden eleménél fixen maradnak. Nyilván $K \leq T \leq L$, és így G minden részcsoportjához egy közbülső testet rendeltünk.

A Galois-elmélet főtétele a következőket mondja ki. Ha $K \leq L$ normális bővítés, akkor a G Galois-csoport rendje épp $|L : K|$, azaz a bővítés foka. Ebben az esetben a fenti megfeleltetés a G részcsoportjai, és a közbülső testek között kölcsönösen egyértelmű. Ha H és T egymásnak felelnek meg, akkor $|H| = |L : T|$ (és így $|G : H| = |T : K|$). A H részcsoport akkor és csak akkor normálosztó G-ben, ha a $K \leq T$ bővítés normális; ilyenkor e bővítés Galois-csoportja éppen a G/H faktorcsoport.

1. *Az alábbiak végrehajtásával határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ test összes résztestét.*

a) Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bővítés?

b) Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ bővítés?

c) Legyen G a b)-beli bővítés Galois-csoportja, és $\varphi \in G$. Mi lehet $\varphi(i)$ és $\varphi(\sqrt[4]{2})$?

d) Mutassuk meg, hogy ha $\varphi, \psi \in G$, $\varphi(i) = \psi(i)$, és $\varphi(\sqrt[4]{2}) = \psi(\sqrt[4]{2})$, akkor $\varphi = \psi$.

e) Az előző két pont alapján igazoljuk, hogy G elemszáma legfeljebb 8.

f) A főtétel alapján mennyi G elemszáma?

g) Legyen $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = i\alpha_1$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -i\alpha_1$. Igazoljuk, hogy ha φ és ψ megegyezik az α_1 és α_2 helyeken, akkor $\varphi = \psi$.

h) Mi az összefüggés $\varphi(\alpha_1)$ és $\varphi(\alpha_3)$ között?

i) Mutassuk meg, hogy ha az α_1, α_2, α_3, α_4 számokat ebben a sorrendben egy négyzet csúcsaira írjuk, akkor G minden eleme a négyzetnek szimmetriája lesz, és így $G \cong D_4$.

j) Legyen $\varphi \in G$ az (13) permutációnak megfelelő eleme G-nek. Írjuk fel $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett, egy általános elem képét φ-nél, és φ fixpontjainak halmazát.

k) Legyen $H = \{id, (24)\}$. Mely testek felelnek meg a H-t tartalmazó részcsoportoknak?

l) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ minden részteste tartalmazza $\mathbb{Q}$-t.

2. *Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.*

3*. *Mutassuk meg, hogy egy negyedfokú bővítésnek kettő, három, vagy öt közbülső teste lehet (a $\mathbb{C}$ résztesteiről van szó).*

4. *Határozzuk meg az alábbi polinomok felbontási testének fokát (és így Galois-csoportjuk rendjét) $\mathbb{Q}$ felett: $x^2 + 1$, $x^4 - 1$, $x^4 + 1$, $x^6 - 1$, $x^6 - 2$, $(x^2 - 2)(x^3 - 2)$, $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Határozzuk meg minél több esetben a Galois-csoportot és a közbülső testeket is.*