Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam első félév

Első alkalom

1. *Hány kétváltozós művelet van egy négyelemű halmazon?*

2. *Írjuk fel az alábbi kétváltozós műveletek szorzástábláit, és osztályozzuk a megfelelő struktúrákat aszerint, hogy izomorfak-e: az* $\{1, i, -1, -i\}$ *számok a szorzásra;* $\mathbb{Z}_4^+$*;* $\mathbb{Z}_8^\times$*;* $\mathbb{Z}_5^\times$*; a* $\{0, 2, 4, 6\}$ *halmaz a modulo* 8 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{0, 4, 8, 12\}$ *halmaz a modulo* 16 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{3, 9, 27, 81\}$ *halmaz a modulo* 81 *szorzásra; egy kételemű halmaz összes önmagába menő leképezése a kompozícióra; egy négyelemű halmaz összes önmagába menő* **konstans** *leképezése a kompozícióra; egy téglalap illetve rombusz összes szimmetriája a kompozícióra; egy kételemű halmaz összes részhalmaza az unióra, a metszetre, illetve a szimmetrikus differenciára; a* $\mathbb{Z}_2$ *feletti összes polinomfüggvények a szorzásra; az* $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ *halmaz az* $(a, b) * (c, d) = (a, d)$ *műveletre; a* $\{0, 1, 2, 3\}$ *halmaz a* min *illetve* max *műveletekre (összesen* 20 *struktúra).*

3. *Az előző feladatban szereplő struktúráknak számítsuk ki az összes részstruktúráit, és az összes kongruenciáit (nem kell az összes struktúráét kiszámolni, csak annyit, amennyi elég ahhoz, hogy a dolog flottul menjen). Melyek bonthatók fel nemtriviális módon direkt szorzatra, és melyek generálhatók egy elemmel? Keressünk olyan négyelemű félcsoportokat, amelyek a felsoroltak egyikével sem izomorfak. Van-e négyelemű egyszerű félcsoport?*

4. *Határozzuk meg izomorfia erejéig az összes négyelemű csoportot.*

5. *Van-e olyan kétváltozós művelet egy négyelemű halmazon, hogy a kapott struktúrának csak egy részalgebrája és két kongruenciája legyen (a triviálisak)?*

6. *Határozzuk meg izomorfia erejéig az összes olyan négyelemű félcsoportot, amelyen minden partíció kongruencia, és azokat is, ahol minden részhalmaz részalgebra.*

7. *Döntsük el az alábbi* $\varphi : G_1 \to G_2$ *leképezésekről, hogy művelettartóak-e.*

a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
e) G_1 *az* $n \times n$*-es komplex mátrixok a szorzásra,* $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
f) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
g) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$.

8. *Az alábbi halmazrendszerek közül melyek induktívak?*

a) Egy végtelen halmaz összes véges részhalmaza.
b) Egy gráf csúcsainak összes olyan részhalmaza, amiben nem halad él.
c) Egy vektortér összes altere.
d) A* $\mathbb{Q}$ *összes valódi részcsoportja.*

9. *Igazoljuk, hogy egy egységelemes gyűrű minden ideálja része egy maximális ideálnak.*

10*. *Írjuk le az egyszerű, kommutatív félcsoportokat.*

11*. *Igazoljuk, hogy ha egy nullelemes véges félcsoportban minden elem alkalmas hatványa nulla, akkor minden elég hosszú szorzat nulla.*