

# BSc Matematika Alapszak, 2020.

Matematikai Intézet,

Természettudományi Kar,

Eötvös Loránd Tudományegyetem.

## Valószínűségszámítás2

- **Óraszám (ea+gy):** 3 + 2
- **Specializáció:** matematikus
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 2
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** valsz\_2m0\_m17ea, valsz\_2m0\_m17ga
- **Ajánlott félév:** 5
- **Státusz:** alt. vál.

### Tantárgyfelelős

- Michaletzky György, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, Matematikai Intézet.

### Előfeltételek

#### **A gyakorlat előfeltételei:**

- **Erős:** Valószínűségszámítás1E-m (valsz\_1m0\_m17ea) vagy Valószínűségszámítás1E-a (valsz\_1a0\_m17ea)
- **Erős:** Analízis4G-m (analiz4m0\_m17gx) vagy MértékelméletG-ae (mertek1v0\_m20gx)

#### **Az előadás előfeltételei:**

- **Gyenge:** a gyakorlat

### Megjegyzések

- A matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók választhatnak, hogy ezt a tárgyat, vagy az alkalmazott matematikus hálóban szereplő, 2+2 óraszámú Valószínűségszámítás2 tárgyat hallgatják.
- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

### A tematikát kidolgozta:

- Michaletzky György, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, Matematikai Intézet.

## Szükséges előismeretek

- Bevezető valószínűségszámítás fogalmai.
- Speciális halmazrendszerek és halmazfüggvények (algebra, szigmaalgebra, mérték). A Lebesgue mérték. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel. A Borel-halmazok jellemzése. A mérhető leképezés fogalma, alaptulajdonságok. Lépcsősfüggvények, integrál. Mérhető függvények integrálja. Az integrál jellemzése és alaptulajdonságai. A Lebesgue-Stieltjes-integrál. A Beppo-Levi tétel, Fatou-lemma, egyéb konvergenciatételek. Az  $L^p$  terek értelmezése, Hölder-, Jensen-, Cauchy és Minkowski-egyenlőtlenség. Az  $L^p$ -terekre vonatkozó alapvető állítások. A Riemann-integrálhatóság és Lebesgue-integrálhatóság kapcsolata. A szorzatmérték fogalma, Fubini-tétel. Abszolút folytonosság. A Radon-Nikodym-tétel. Előjeles mértékek.
- Topológikus terek, nyílt, zárt halmazok. Metrikus terek.

## A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az axiomatikus valószínűségszámítás elemeinek, és ezek egyes alkalmazásainak bemutatása.

## Irodalom

- **J. Mogyoródi, Á. Somogyi:** *Valószínűségszámítás*. Egyetemi Jegyzet, 1989.
- **L. Galambos:** *Advanced probability theory*. Marcel Dekker, New York,

## Tematika

- A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiómarendszere. Valószínűségi változók eloszlása, eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye. (Abszolút folytonos és diszkrét eloszlású valószínűségi változók.) A sűrűségfüggvény transzformációja diffeomorfizmus esetén.
- Események, eseményrendszerek, valószínűségi változók függetlensége. A generált szigma-algebra függetlensége. Kolmogorov-féle 0-1 törvény.
- Valószínűségi változók konvergenciájának alaptípusai. Sztochasztikus, 1 valószínűségű,  $L^p$ -beli konvergencia. Kapcsolat az egyes konvergenciafajták között. Egyenletes integrálhatóság. De la Vallée Poussin tétele.
- Lévy egyenlőtlenség. Független valószínűségi változók összege sztochasztikus konvergenciájának és 1 valószínűségi konvergenciájának ekvivalenciája. Nagy számok gyenge törvényei. A Feller-féle gyenge törvény.
- Valószínűségeloszlások gyenge konvergenciája. Feszesség, relatív kompaktság. Prohorov tétele. (Az egyik irány csak véges dimenziós Euklidészi tér esetén. [Az eloszlásbeli konvergencia jellemzése az eloszlásfüggvény viselkedésével. Helly-Brey-féle kiválasztási tétel.]
- Karakterisztikus függvény. Inverziós formula. Dobb-egyenlőtlenség. Folytonossági tétel. Centrális határeloszlástétel bizonyítása karakterisztikus függvények segítségével. Lindeberg-Feller-féle határeloszlástétel. A konvergenciagyorsaságról. (Berry-Esséen-tétel.)
- A feltételes várható érték általános fogalma. Alaptulajdonságok. Kiszámítása. Feltételes sűrűségfüggvény. A feltételes eloszlás reguláris változata.
- Martingálok, maximál-egyenlőtlenségek. Martingál-konvergencia-tétel. Példa arra, hogy ennek feltétele nem szükséges az 1 valószínűségi konvergenciához.

- A nagy számok erős törvényei. (Bizonyítás a Kronecker-lemma és martingálkonvergencia segítségével.) Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye.
- Független tagú végtelen sorok konvergenciája. Kolmogorov-féle három sor tétel.
- Martingálok  $L^1$  konvergenciája. Reguláris martingálok.