

# BSc Matematika Alapszak, 2020.

Matematikai Intézet,

Természettudományi Kar,

Eötvös Loránd Tudományegyetem.

## Algebra3

- **Óraszám (ea+gy):** 2 + 2
- **Specializáció:** matematikus
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 2
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** algebr3m0\_m17ea, algebr3m0\_m17ga
- **Ajánlott félév:** 3
- **Státusz:** kötelező
  
- **Specializáció:** alk. mat.
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 2
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** algebr3m0\_m17ea, algebr3m0\_m17ga
- **Ajánlott félév:** 3
- **Státusz:** köt. vál.
  
- **Specializáció:** elemző
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 2
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** algebr3m0\_m17ea, algebr3m0\_m17ga
- **Ajánlott félév:** 3
- **Státusz:** köt. vál.

## Tantárgyfelelős

- Pályf Péter Pál, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

## Előfeltételek

### ***A gyakorlat előfeltételei:***

- *Erős:* Algebra2E (algebr2\*0\_m17ea)
- *Erős:* Számelmélet1E (szamel1\*0\_m17ea)

### ***Az előadás előfeltételei:***

- *Gyenge:* a gyakorlat

## Megjegyzések

- ***Pótlási lehetőség:*** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

### **A tematikát kidolgozta:**

- Pályf Péter Pál, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

## Szükséges előismeretek

Klasszikus és lineáris algebra, elemi számelmélet.

## A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az absztrakt algebrai alapfogalmak és szemléletmód bemutatása.

## Irodalom

- **Kiss Emil:** TypoTeX Kiadó, 2007. [Információk, kiegészítések.](#)

### ***Ajánlott:***

- **Fried Ervin:** *Algebra I-II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.
- **Fuchs László:** *Algebra.* ELTE egyetemi jegyzet.
- **B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes:** *Absztrakt algebrai feladatok.* Polygon kiadó, Szeged, 2005.

## Tematika

- Csoportok. Gyűrű additív és multiplikatív csoportja, mátrixcsoportok. A szimmetrikus és az alternáló csoport, ciklusfelbontás. A Klein-csoport, a diédercsoport és a kvaterniócsoport.
- Részcsoport, jellemzése zártsággal és komplexusszorzással. Lagrange tétele, mellékosztály, index, a baloldali és a jobboldali mellékosztályok száma megegyezik. Egy elemmel generált részcsoport, ciklikus csoport. Elem rendje osztója a csoport rendjének, következmény: Euler-Fermat-tétel. Egy csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportha, ha prímrendű. Prímrendű csoport ciklikus. A ciklikus csoportok részcsoporthainak leírása. A generált részstruktúra (részcsoport, altér, részgyűrű, ideál stb.) általános fogalma és létezése. A generált részcsoport elemeinek leírása az általános, illetve a kommutatív esetben. Minden véges szimmetrikus csoport két elemmel generálható.
- Permutációcsoport, fok, orbit, stabilizátor, összefüggésük, tranzitivitás. A szabályos testek szimmetriáinak a száma. Csoport hatása halmazon. Cayley tétele.
- Izomorfizmus, módszerek az izomorfia eldöntésére. A ciklikus csoportok izomorfia-típusai. A kis elemszámú csoportok leírása. Homomorfizmus képe és magja, normálosztó. Faktorcsoport, természetes homomorfizmus, homomorfizmus-tétel. A faktorcsoport részcsoporthai és normálosztói, az izomorfizmus-tételek. Elem rendje a faktorcsoportban. Kettő indexű részcsoport normálosztó. A konjugálás, mint automorfizmus. Csoport hatása önmagán konjugálással, konjugáltosztályok. Egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha konjugáltosztályok egyesítése. Egyszerű csoportok, példák.
- A direkt szorzat fogalma és belső jellemzése véges sok tényező esetén. Diszkrét direkt szorzat (direkt összeg). Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus. A véges Abel-csoportok alaptétele, egyértelműség (bizonyítás nélkül).
- Szabad csoport. Minden csoport előáll egy szabad csoport faktorcsoporthaként. Dyck tétele. Csoport megadása generátorokkal és definiáló relációkkal.

- Normállánc, kompozíciólánc. Jordan-Hölder-tétel. Feloldható csoportok. A szimmetrikus csoportok kompozícióláncai. Féldirekt szorzat.
- Elem, illetve részcsoporthoz centralizátora, normalizátora. Minden  $p$ -csoport feloldható, és centruma nemtriviális, minden  $p^2$  rendű csoport kommutatív. Sylow részcsoporthoz, Sylow tételei.
- Gyűrűk. Részgyűrű, homomorfizmus, ideál, faktorgyűrű, homomorfizmus-tétel. A komplex számok mint faktorgyűrű. Beágyazás egységelemes gyűrűbe. Bal- és jobbideál, a generált ideál képlete kommutatív, egységelemes gyűrűben. A maximum-feltétel ekvivalens alakjai, kapcsolat a véges generáltsággal. Véges nullosztómentes gyűrű test. Egyszerű gyűrűk, minden ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű egyszerű. Jobb és baloldali annullátor. A balideálmentes gyűrűk szerkezete. Következmény: egységelemes kommutatív gyűrű maximális ideálja szerinti faktor test.
- Euklideszi gyűrű, ebben minden ideál főideál. Egy egységelemes integritási tartomány akkor és csak akkor alaptételes, ha a főideálokra érvényes a maximum-feltétel, és minden irreducibilis elem prím. Következmény: főideálgyűrű, euklideszi gyűrű alaptételes.
- A hányadostest konstrukciója. Nullosztómentes gyűrű elemeinek additív rendje, karakterisztika. Prímtest, szerkezete. Rendezett integritási tartomány, pozitívstartomány és jellemzése, az elrendezhetőség feltétele. A kvaterniótest.
- Hálók. Részben rendezett halmaz. Legkisebb felső korlát, legnagyobb alsó korlát, háló. A hálók megadása a műveletekre vonatkozó axiómarendszerrel. A két definíció ekvivalenciája. Moduláris és disztributív hálók. A normálosztóháló, ill. a részmodulusháló moduláris. Stone-tétel disztributív hálókra. Komplementum. Boole-algebra.
- Univerzális algebra. Általános algebrai struktúrák, típus. Részalgebra, homomorfizmus direkt szorzat. Azonosság, azonosságokkal definiálható osztály, varietás. Szabad algebra. Birkhoff tétele.