BSc Matematika Alapszak, 2020.

Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Algebra2 — normál változat

- ***Óraszám (ea+gy):*** 2 + 2
- ***Specializáció:*** közös
- ***Kredit (ea+gy):*** 3 + 3
- ***Számonkérés:*** kollokvium + gyak. jegy
- ***Tárgykód (ea, gy):*** algebr2n0_m17ea, algebr2n0_m17ga
- ***Ajánlott félév:*** 2
- ***Státusz:*** kötelező

Tantárgyfelelős

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

A gyakorlat előfeltételei:

- *Erős:* Algebra1E (algebr1*0_m17ea)
- *Erős:* Számelmélet1G (szamel1*0_m17ga)

Az előadás előfeltételei:

- *Gyenge:* a gyakorlat

Megjegyzések

- A tárgy összesen 6 kreditjéből 1 kreditnyi olyan tananyagot tartalmaz, amely a Képzési és Kimeneti Követelmények szerinti "geometria, topológia, differenciálgeometria" blokkhoz tartozik.

Ennél a tárgynál a gyakorlaton is legalább 50%-ban az elméleti anyag elmélyítése történik.

- ***Pótlási lehetőség:*** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

A klasszikus algebra alapjai (komplex számok, polinomok, mátrixműveletek, determinánsok).

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az alapvető lineáris algebrai ismeretek bemutatása (vektortér, lineáris leképezés, sajátérték, minimálpolinom, kvadratikus alak, euklideszi tér). A normál változat azt jelenti, hogy az akkreditált tematikában szereplő tananyag keretein belül elsősorban az alapvető fogalmakat, tételeket, módszereket tárgyaljuk igen részletesen, figyelmet fordítva a középiskolai hiánypótlásra is.

Irodalom

- **Freud Róbert:** *Lineáris algebra.* ELTE Eötvös kiadó, 2009.

Tematika

- Vektorterek. A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok, példák. Az altér fogalma és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével. A generált altér mint lineáris kombinációk halmaza. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk. A bázis fogalma, jellemzése mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer. Vektor koordinátái adott bázisban.
- Független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré, minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége. A dimenzió fogalma. Valódi altér dimenziója. Alterek összege. Az összeg elemeinek előállítása mikor

egyértelmű, direkt összeg, direkt kiegészítő altér létezése és dimenziója.

- Lineáris leképezések. Lineáris leképezés, lineáris transzformáció. Műveletek lineáris leképezések között. A lineáris leképezések vektortere és ennek dimenziója. A lineáris leképezések előírhatósági tétele, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban. Összefüggés a mátrixműveletek és a lineáris leképezések műveletei között. A bázistranszformáció képlete.
- Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal-, illetve jobbinverze, nem bal-, illetve jobboldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív). Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. Az invertálható transzformációkra bizonyított jellemzés átvitele mátrixokra. A determináns eltűnésének jellemzése az oszlopok összefüggőségével.
- Vektorrendszer rangja mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. A rang legfeljebb akkora, mint az értelmezési tartomány dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja. Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja. Az oszloprang és a sorrang megegyezik (bizonyítás nélkül). A rang kiszámítása Gauss-eliminációval. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.
- Egy lineáris transzformáció, illetve négyzetes mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei, karakterisztikus polinomja, ennek gyökei a sajátértékek. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek. Következmény: ha annyi különböző sajátérték van, mint a tér dimenziója, akkor a transzformáció diagonalizálható. A diagonalizálhatóság alkalmazásai.
- Egy A mátrix vagy transzformáció minimálpolinomja. A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak. A Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának (bizonyítás

nélkül). Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb a dimenzió; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.

- Egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik, és minden gyöke egyszeres (bizonyítás nélkül). A Jordan-normálalak, egyértelműség (bizonyítás nélkül). A Jordan-normálalak hatványozása.
- Bilineáris leképezések. Bilineáris leképezés vektortérpáron, ennek előírhatósága bázispáron. Bilineáris függvény mátrixa, szimmetrikus bilineáris függvény. Valós feletti kvadratikus alak, minden kvadratikus alak egyértelműen kapható egy szimmetrikus bilineáris függvényből. Egy bilineáris függvény akkor és csak akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus. Ortogonalitás, a Gram-Schmidt ortogonalizáció. Sylvester tehetetlenségi tétele (bizonyítás nélkül). A kvadratikus alak karaktere, ennek kapcsolata a főminorokkal (bizonyítás nélkül). Komplex bilineáris függvény.
- Euklideszi terek. Valós és komplex euklideszi tér, ortonormált bázis, a skaláris szorzat képlete. Ortogonalizáció, ortogonális kiegészítő altér. Merőlegesség, hossz, szög, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség (csak valósban bizonyítva), a háromszög-egyenlőtlenség. Vektor koordinátáinak, transzformáció mátrixának felírása ortonormált bázisban a skaláris szorzat segítségével. Az adjungált transzformáció, jellemzése skaláris szorzattal.
- Az invariáns altér fogalma. Komplex felett minden transzformáció alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix. Normális, önadjungált, szimmetrikus, unitér és ortogonális transzformációk. Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha skalárszorzattartó, illetve ha távolságtartó, illetve ha ortonormált bázist ortonormált bázisba visz. Unitér (ortogonális) transzformáció sajátértékei egy abszolút értékűek, önadjungált (szimmetrikus) transzformáció sajátértékei valósak. Egy valós feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha szimmetrikus (főtengelytétel).