

BSc Matematika Alapszak, 2017.

Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Geometriai transzformációk és alkalmazásai

- **Óraszám (ea+gy):** 2 + 2
- **Specializáció:** alk. mat.
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 3
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** geotrala0_m17ea, geotrala0_m17ga
- **Ajánlott félév:** 4
- **Státusz:** köt. vál.

Tantárgyfelelős

- Szeghy Dávid, Geometriai Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

A gyakorlat előfeltételei:

- **Erős:** Geometria1E (geomet1*0_m17ea)
- **Erős:** Algebra2E (algebr2*0_m17ea)

Az előadás előfeltételei:

- **Gyenge:** Analízis2E (analiz2x0_m17ea) vagy Az analízis megalapozásaE (megalalx0_m17ea)
- **Gyenge:** a gyakorlat

Megjegyzések

- Alkalmazott matematikus specializáción kötelezően el kell végezni legalább egyet az alábbi két tárgy közül: Differenciálgeometria, Geometriai transzformációk és alkalmazásai.
- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Csikós Balázs, Geometriai Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

Az euklideszi sík és tér elemi geometriája. Vektorok és vektorműveletek, koordináta-geometria. Komplex számok. Vektortér, lineáris altér, lineáris transzformációk. Lineáris transzformációk leírása mátrixokkal. Egyváltozós vektorértékű függvények deriválása.

A tantárgy célkitűzése

A projektív és affin transzformációcsoportok, illetve az euklideszi tér izometriacsoportjának geometriai és algebrai leírása. Különféle gyakorlati problémák megoldása a projektív, és egybevágósági transzformációk, illetve az infinitezimális izometriák alkalmazásával.

Irodalom

- **M. Berger:** *Geometry I.* Universitext. Springer-Verlag, 1987.
- **M.W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar:** *Robot Modeling and Control.* John-Wiley & Sons, Inc., 2006.
- **D. Hilbert, S. Cohn-Vossen:** *Szemléletes geometria.* Gondolat Könyvkiadó, 1982.

Tematika

- A perspektív vetítés definíciója és alaptulajdonságai. Az ideális pontok bevezetésének motivációi. A projektív tér és a benne fekvő projektív egyenesek és a projektív síkok.
- A kettősviszony definíciója. A kettősviszony változása a pontok permutálásakor. A kettősviszony kifejezése a pontok közti távolságokkal, illetve a ponthármasok osztóviszonyaival, ha a négy pontból legalább három közönséges. Papposz tétele a kettősviszonyról. Harmonikus négyesek. A teljes négyoldal tétele.
- A projektív sík koordinátázása. A projektív sík pontjainak és egyeseinek megadása reprezentáló vektorokkal. Projektív koordináta-rendszerek. Pontok és egyenesek homogén koordinátái. Pont és egyenes illeszkedési feltétele a reprezentáló vektorokkal kifejezve. Két pontra illeszkedő egyenes és két egyenes metszéspontjának reprezentáló vektora. A dualitás elve a projektív síkon. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerhez illeszkedő projektív koordináta-rendszer.
- Projektív transzformációk. Síkok közötti projektív transzformációk definíciója. Egy lineáris leképezés által meghatározott projektív transzformáció. A projektív geometria alaptétele. A projektív általános lineáris csoport.
- Az affín transzformációk definíciója. Egy affín transzformáció analitikus leírása egy Descartes-féle koordináta-rendszerben és a hozzá illeszkedő projektív koordináta-rendszerben. Affín transzformáció megadása egy háromszöggel és képével (síkban), illetve egy tetraéderrel és képével (térben).
- Egybevágósági transzformációk \mathbf{R}^n -ben. Definíció, példák: eltolások, tükrözések affín alterekre. Cartan tétele: minden egybevágósági transzformáció előáll legfeljebb $(n+1)$ hipersíkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. Az egybevágósági transzformációk analitikus megadása, ortogonális lineáris transzformációk. Az ortogonális transzformációk kanonikus alakja. Az analitikus leírás megváltozása a koordináta-rendszer eltolásakor. Az izometriák kanonikus alakja. Az ortogonális és az egybevágósági transzformációk osztályozása $n=1,2,3$ -ra. Irányítástartó és irányításváltó transzformációk.
- $SO(3)$ elemeinek leírása kvaterniókkal. Műveletek kvaterniókkal és tulajdonságaik, a tisztán képzetes kvaterniók terének invarianciája a konjugálásra nézve. Konjugálás a $\cos(\alpha)+\sin(\alpha)a$ kvaternióval, ahol „a” tisztán képzetes egységkvaternió. Az $SO(3)$ -beli elemek kvaternió-reprezentációjának előnyei a számítógépes geometriában.
- Infinitézimális izometriák (Killing-mezők). Merev test mozgásának analitikus leírása. A pillanatnyi sebességmező. A Killing-mezők megadhatósága $X(p)=Mp+v$ alakban, ahol M egy ferdén szimmetrikus mátrix. Killing-mezők kanonikus alakra hozása a koordináta-rendszer megváltoztatásával.
- Killing-mezők osztályozása a síkban. Momentáncentrum. Az álló és a mozgó pólusgörbék. Tétel az álló és a mozgó pólusgörbék egymáson gördüléséről. Két mozgó sík egymásra vonatkozó pólusgörbéi. Fogaskerékfogazások. A fogaskerékfogazások alaptétele. Fogazáskonstrukciók epiciklois- és hipociklois-ívvel, fogazás körevolvens-ívvel.
- Infinitézimális izometriák geometriai leírása a térben. Momentántengely. Két mozgó tér egymásra vonatkozó pólusfelületei. A momentántengely kiszámolása. Alkalmazás: hiperboloid-fogaskerekek két kitérő forgástengely között.
- Robotgeometria. Alapfogalmak: alap, manipulátor (kéz), tagok, csuklók, elemi csuklótípusok, elemi csukló tengelye, munkatér. Nyílt láncú robotkarok osztályozása az egymást követő csuklótípusok alapján. Példa RRR, RPP, PPP típusú robotkarra. Koordináta-rendszer hozzárendelése a tagokhoz a Denavit-Hartenberg-konvenció szerint. A Denavit-Hartenberg-féle paraméterek. A D-H-konvenció előnye.
- A direkt és inverz kinematikai és sebességkinematikai feladat. A direkt kinematikai feladatok megoldása a Denavit-Hartenberg-féle paraméterek segítségével. Szinguláris konfigurációk.