

BSc Matematika Alapszak, 2017.

Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Algebra4

- **Óraszám** ($ea+gy$): $2 + 2$
- **Specializáció:** matematikus
- **Kredit** ($ea+gy$): $3 + 2$
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód** (ea, gy): algebr4m0_m17ex, algebr4m0_m17gx
- **Ajánlott félév:** 4
- **Státusz:** kötelező

Tantárgyfelelős

- Pálfy Péter Pál, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

A gyakorlat előfeltételei:

- **Erős:** Algebra3E-m (algebr3m0_m17ea)

Az előadás előfeltételei:

- **Gyenge:** a gyakorlat

Megjegyzések

- **Pótlási lehetőség:** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Pálfy Péter Pál, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

Klasszikus és lineáris algebra, elemi számelmélet, csoport- és gyűrűelmélet.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az absztrakt algebrai alapfogalmak és szemléletmód bemutatása.

Irodalom

- **Kiss Emil:** *Bevezetés az algebrába*. TypoTeX Kiadó, 2007. [Információk, kiegészítések](#).

Ajánlott:

- **Fried Ervin:** *Algebra I-II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.
- **Fuchs László:** *Algebra*. ELTE egyetemi jegyzet.
- **B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes:** *Absztrakt algebrai feladatok*. Polygon kiadó, Szeged, 2005.

Tematika

- **Testbővítések.** A testbővítés fogalma, foka, adott elemekkel generált bővítés. Elem minimálpolinomja, algebrai és transzcendens elemek. A minimálpolinom jellemzése az irreducibilitás segítségével. Egyszerű testbővítés, ennek szerkezete a transzcendens és az algebrai esetben. A bővítés foka egyenlő a

minimálpolinom fokával. Az egyszerű testbővítés, mint faktorgyűrű. Egyszerű testbővítés konstrukciója. Egymás utáni bővítések fokainak szorzástétele. Következmények: elem foka osztója a bővítés fokának, minden véges bővítés algebrai. Összeg és szorzat fokának becslése. Az algebrai elemek résztestet alkotnak, az algebrai számok teste, ez algebrailag zárt. Algebrailag zárt bővítés létezése általános test esetén (bizonyítás nélkül).

- Galois-elmélet. A felbontási test fogalma. Normális bővítés, polinom felbontási teste normális. A felbontási test egyértelmű. A tökéletes test fogalma, minden nulla karakterisztikájú test tökéletes. Tökéletes test véges bővítése egyszerű bővítés. Relatív automorfizmus, a Galois-csoport fogalma. A Galois-elmélet főtétele. Konjugálttság, a konjugáltak a minimálpolinom gyökei.
- A véges testek elemszáma, létezése, egyértelműsége. Minden véges test tökéletes. Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Véges test véges bővítése mindig normális, a Galois-csoport ciklikus, a Galois-csoport generátoreleme, a közbülső testek száma és foka. Wedderburn tétele (minden véges ferdetest kommutatív).
- Geometriai szerkeszthetőség. Az alapadatok által generált test. A szerkesztési lépések és a másodfokú bővítések kapcsolata. A szerkeszthető számok jellemzése: minimálpolinomjuk felbontási testének foka az alaptest felett 2-hatvány. Konkrét szerkesztési feladatok megoldhatatlansága: kockakettőzés, szögharmadolás, körmégszögcsítés. A körosztási test foka és Galois-csoportja. Szabályos sokszögek szerkeszthetőségének jellemzése.
- Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatósága. Kapcsolat a Galois-csoport feloldhatóságával. Példa olyan polinomra, amelynek Galois-csoportja S_5 és így nem oldható meg gyökjelekkel. Az általános egyenlet Galois-csoportja a teljes szimmetrikus csoport. A legalább ötödfokú egyenletre nincs általános megoldóképlet.
- Modulusok. Példák: Abel-csoportok, vektorterek, $K[x]$ -modulusok. Részmodulus, homomorfizmus, faktormodulus, homomorfizmus-tétel. Direkt összeg (végtelen tagú is). Szabad modulus. Egyszerű (minimális) modulus. Modulus endomorfizmusgyűrűje. Schur-lemma. Sűrűségi tétel. Idempotens endomorfizmusok kapcsolata a direkt felbontással. Kommutatív diagramok. Egzakt sorozatok. Projektív modulus. Egy modulus akkor és csak akkor projektív, ha szabad modulus direkt összeadandója. Injektív modulus. Kommutatív R gyűrű fölött $\text{Hom}(A, B)$ is R -modulus. Modulusok tenzorszorzata.
- Főideálgyűrű feletti végesen generált modulusok. Mátrixok normálmalakra hozása. Ciklikus modulus; felbontása. Főideálgyűrű feletti végesen generált modulusok alaptétele. Alkalmazások: véges Abel-csoportok, Jordan-féle normálmalak.
- Féligegyszerű modulusok és gyűrűk. Féligegyszerű gyűrűk ekvivalens jellemzései: minden modulus féligegyszerű; minden modulus projektív; minden modulus injektív; a gyűrű balideáljaira teljesül a minimumfeltétel és nem tartalmaz nilpotens balideált. Gyűrű Jacobson-radikálja. Féligegyszerű modulus felbontása homogén részmodulusok direkt összegére. Wedderburn-Artin-tétel: Féligegyszerű gyűrű felbontása teljes mátrixgyűrűk direkt összegére.
- Test feletti algebrák. Példák: polinomgyűrű, mátrixgyűrű, testbővítések. Csoportalgebra, Maschke-tétel. Kvaternióalgebra. Frobenius tétele a valós test felett véges dimenziós nullosztómentes algebrákról.