BSc Matematika Alapszak, 2017.

Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Algebra2 — intenzív változat

- ***Óraszám (ea+gy):*** 2 + 2
- ***Specializáció:*** közös
- ***Kredit (ea+gy):*** 3 + 3
- ***Számonkérés:*** kollokvium + gyak. jegy
- ***Tárgykód (ea, gy):*** algebr2i0_m17ea, algebr2i0_m17ga
- ***Ajánlott félév:*** 2
- ***Státusz:*** kötelező

Tantárgyfelelős

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

A gyakorlat előfeltételei:

- *Erős:* Algebra1E (algebr1*0_m17ea)
- *Erős:* Számelmélet1G (szamel1*0_m17ga)

Az előadás előfeltételei:

- *Gyenge:* a gyakorlat

Megjegyzések

- A tárgy összesen 6 kreditjéből 1 kreditnyi olyan tananyagot tartalmaz, amely a Képzési és Kimeneti Követelmények szerinti "geometria, topológia, differenciálgeometria" blokkhoz tartozik.
  Ennél a tárgynál a gyakorlaton is legalább 50%-ban az elméleti anyag elmélyítése történik.
- ***Pótlási lehetőség:*** A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

A klasszikus algebra alapjai (komplex számok, polinomok, mátrixműveletek, determinánsok).

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az alapvető lineáris algebrai ismeretek bemutatása (vektortér, lineáris leképezés, sajátérték, minimálpolinom, kvadratikus alak, euklideszi tér). Az intenzív változat azt jelenti, hogy az akkreditált tematikában szereplő fogalmakat, tételeket, módszereket teljes mélységükben, bizonyításokkal együtt, viszonylag absztrakt módon, az egyszerűbb anyagrészeken gyorsan áthaladva tárgyaljuk.

Irodalom

- **Freud Róbert:** *Lineáris algebra.* ELTE Eötvös kiadó, 2009.

Tematika

- Vektorterek. A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok, példák. Az altér fogalma és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével. A generált altér mint adott elemeket tartalmazó legszűkebb altér; generátorrendszer. A generált altér elemeinek jellemzése: lineáris kombináció. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk. Végtelen vektorrendszer függetlensége. A bázis fogalma, jellemzése mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer. Következmény: véges bázis létezése végesen generált vektortérben. Vektor koordinátái adott bázisban.
- A függés tranzitivitása, a kicserélési tétel. Következmények: független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré, minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége. A dimenzió fogalma. Valódi altér dimenziója. Alterek összege, mint az unió által generált altér. Az összeg elemeinek előállítása mikor egyértelmű, direkt összeg, direkt kiegészítő altér létezése. Alterek összegének dimenziója.
- Lineáris leképezések. A lineáris leképezés, mint vektorterek közötti homomorfizmus; lineáris transzformáció. Műveletek lineáris leképezések között. Az algebra fogalma, a lineáris leképezések vektortere, a lineáris transzformációk algebrája. A lineáris leképezések előírhatósági tétele, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban. Összefüggés a mátrixműveletek és a lineáris leképezések műveletei között, ennek vektortér- és algebra-izomorfizmusként való megfogalmazása. A bázistranszformáció képlete.
- Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal-, illetve jobbinverze, nem bal-, illetve jobboldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív). Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. A lineáris leképezések terének dimenziója.
- Lineáris transzformáció determinánsa: hányszorosára növeli a térfogatot. Következmény: a determinánsok szorzástétele. Transzformáció determinánsa megegyezik a mátrixának a determinánsával. Egy transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Az invertálható transzformációkra bizonyított jellemzés átvitele mátrixokra.
- Vektorrendszer rangja mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. A rang legfeljebb akkora, mint az értelmezési tartomány dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja. Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja. Az oszloprang és a sorrang megegyezik, determinánsrang, a rang a Gauss-eliminációnál keletkező vezéregyesek száma. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével. A duális tér és a duális bázis. A diád fogalma. Minden mátrix felbontható rangnyi számú diád összegére, de kevesebbre nem. Algoritmus a minimális diádfelbontás meghatározására.
- Egy lineáris transzformáció, illetve négyzetes mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei, karakterisztikus polinomja, ennek gyökei a sajátértékek. A sajátalterek összege direkt összeg, különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek. Következmény: ha annyi különböző sajátérték van, mint a tér dimenziója, akkor a transzformáció diagonalizálható.
- Egy A mátrix vagy transzformáció minimálpolinomja azon polinomokból álló ideál normált generátoreleme, melyeknek A gyöke. A minimálpolinom egyértelmű, ez a legalacsonyabb fokú polinom, aminek A gyöke, egy polinomnak A akkor és csak akkor gyöke, ha ez a polinom a minimálpolinomnak többszöröse. A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió négyzete. Bővebb test fölött egy mátrix minimálpolinomja nem változik. A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak. A Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának. Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb a dimenzió; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
- Az invariáns altér fogalma, a tér direkt összegre való felbontása a minimálpolinom segítségével. Egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik, és minden gyöke egyszeres. Egy transzformáció akkor és csak akkor nilpotens, ha mátrixa alkalmas bázisban szigorú felső háromszögmátrix, kapcsolat a Cayley-Hamilton-tétellel. A Jordan-normálalak, egyértelműség. A Jordan-normálalak hatványozása.
- Bilineáris leképezések. Bilineáris leképezés vektortérpáron, ennek előírhatósága bázispáron. Bilineáris függvény mátrixa, szimmetrikus bilineáris függvény. A bázistranszformáció képlete. Valós feletti kvadratikus alak, minden kvadratikus alak egyértelműen kapható egy szimmetrikus bilineáris függvényből. Egy bilineáris függvény akkor és csak akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus.

Ortogonalitás, a Gram-Schmidt ortogonalizáció. Sylvester tehetetlenségi tétele. A kvadratikus alak karaktere, ennek kapcsolata a főminorokkal. Komplex bilineáris függvény, itt a kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a bilineáris függvényt. A kvadratikus alak akkor és csak akkor valós, ha a függvény Hermite-féle.

- Euklideszi terek. Valós és komplex euklideszi tér, ortonormált bázis, a skaláris szorzat képlete. Ortogonalizáció, ortogonális kiegészítő altér. Merőlegesség, hossz, szög, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség. Vektor koordinátáinak, transzformáció mátrixának felírása ortonormált bázisban a skaláris szorzat segítségével. Az adjungált transzformáció, jellemzése skaláris szorzattal.
- Komplex felett egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális, azaz felcserélhető az adjungáltjával. Normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek, ezek egyben az adjungált transzformáció sajátalterei is, konjugált sajátértékekkel. Komplex felett minden transzformáció alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix. Önadjungált, szimmetrikus, unitér és ortogonális transzformációk. Az A transzformáció akkor és csak akkor önadjungált (szimmetrikus), ha a hozzá tartozó bilineáris függvény Hermite-féle (szimmetrikus). Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha skalárszorzattartó, illetve ha távolságtartó, illetve ha ortonormált bázist ortonormált bázisba visz. Unitér (ortogonális) transzformáció sajátértékei egy abszolút értékűek, önadjungált (szimmetrikus) transzformáció sajátértékei valósak.
- Egy valós feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha szimmetrikus (főtengelytétel), és pontosan akkor ortogonális, ha alkalmas ortonormált bázisban a mátrixa forgatásokat tartalmazó kétszer kettes, illetve +1-et vagy -1-et tartalmazó egyszer egyes diagonális blokkokra bomlik.
- Ha a bázistranszformációt ortonormált bázisok között végezzük, akkor a mátrixa unitér (ortogonális). Következmények: egy mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható unitér transzformációval, ha normális; minden hermitikus/szimmetrikus bilineáris függvény alkalmas ortonormált bázisban diagonalizálható.
- Vektorterek tenzorszorzata, ennek univerzális tulajdonsága. A tenzorszorzat és a diádfelbontás kapcsolata. Lineáris leképezések tenzorszorzata, mátrixok Kronecker-szorzata.