

BSc Matematika Alapszak, 2017.

Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Algebra1 — normál változat

- **Óraszám** ($ea+gy$): $2 + 2$
- **Specializáció**: közös
- **Kredit** ($ea+gy$): $3 + 3$
- **Számonkérés**: kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód** (ea, gy): algebr1n0_m17ea, algebr1n0_m17ga
- **Ajánlott félév**: 1
- **Státusz**: kötelező

Tantárgyfelelős

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

Az előadás előfeltételei:

- *Gyenge*: a gyakorlat

Megjegyzések

- Az Algebra1 normál és intenzív változata egymás között átjárható.
Ennél a tárgynál a gyakorlaton is legalább 50%-ban az elméleti anyag elmélyítése történik.
- **Pótlási lehetőség**: A félév végén, indokolt esetben, a gyakorlatvezető döntése alapján egy javító zárthelyi dolgozat írására van lehetőség.

A tematikát kidolgozta:

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

A tárgy a középiskolai matematika anyag ismeretét követeli.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az alapvető algebrai ismeretek bemutatása (komplex számok, polinomok, mátrixok és determinánsok). A normál változat azt jelenti, hogy az akkreditált tematikában szereplő tananyag keretein belül elsősorban az alapvető fogalmakat, tételeket, módszereket tárgyaljuk igen részletesen, figyelmet fordítva a középiskolai hiánypótlásra is.

Irodalom

- **Freud Róbert**: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös kiadó, 2009.
- **Kiss Emil**: *Bevezetés az algebraiba*. TypoTeX Kiadó, 2007. [Információk, kiegészítések](#).

Tematika

- Komplex számok. A komplex számok (mint formális kifejezések). Valós és képzetes rész, ezek egyértelműsége. Összeadás, kivonás, szorzás. Konjugált, abszolút érték, tulajdonságaik, kapcsolatuk. Minden nem nulla komplex számmal lehet osztani, nullosztómentesség. A műveletek tulajdonságai: a komplex számok testet alkotnak. Négyzetgyökvonás, a másodfokú egyenlet megoldása.
- A komplex számsík, komplex szám szöge és trigonometrikus alakja. Összeadás mint vektorösszeadás.

Szorzás és osztás trigonometrikus alakban. Egyes geometriai transzformációk kifejezése komplex számokkal. A háromszög-egyenlőtlenség. Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.

- A komplex egységgyökök, trigonometrikus alakjuk, számuk. Gyökvonás komplex számból, az n -edik gyökök meghatározása és geometriai elhelyezkedése. Primitív n -edik egységgyök, jellemzésük a trigonometrikus alak segítségével, számuk.
- Polinomok. Komplex együtthatós polinom mint formális kifejezés. Polinomok egyenlősége, együtthatói, főegyütthatója, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. A komplex együtthatós polinomok nullosztómentes gyűrűt alkotnak.
- A polinomfüggvény fogalma. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. A gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele. Komplex fölött a polinomfüggvények és a polinomok kapcsolata kölcsönösen egyértelmű. Az algebra alaptétele (bizonyítás nélkül): komplex fölött minden nem konstans polinomnak van gyöke. Gyök multiplicitása. Egy n -edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva pontosan n komplex gyöke van. A racionális gyökteszt. A Lagrange-interpoláció.
- A többhatározatlanú polinom fogalma. A gyökök és együtthatók összefüggése. A gyökök szimmetrikus kifejezéseinek és az elemi szimmetrikus polinomoknak a kapcsolata. Polinomok a \mathbf{Z}_m gyűrű fölött, itt a nullosztómentesség és az azonossági tétel nem mindig teljesül.
- A polinomok számelmélete. Számelméleti fogalmak polinomokra: oszthatóság, egység, felbonthatatlan (más néven irreducibilis), prímtulajdonságú polinom, kitüntetett közös osztó és többszörös, ezek egyértelműsége. A polinomgyűrű egységei. Minden nem nulla komplex együtthatós polinommal lehet maradékosan osztani. A maradékos osztás egyértelmű. Az euklideszi algoritmus. A számelmélet alaptétele érvényes a komplex, a valós, és a racionális együtthatós polinomok között, sőt tetszőleges test fölötti polinomok gyűrűjében is, az egész számok számelméletének mintájára.
- Test fölött az irreducibilis polinomok azok a nem konstans polinomok, melyek nem bonthatók alacsonyabb fokúak szorzatára. Minden elsőfokú polinom irreducibilis; a másod- és harmadfokúak pontosan akkor irreducibilisek, ha nincs az alaptestben gyökük. Ha egy legalább másodfokú polinomnak van az alaptestben gyöke, akkor nem irreducibilis (de ha nincs gyöke, lehet reducibilis). Az irreducibilis polinomok komplex fölött az elsőfokúak. Egy valós együtthatós polinomnak minden komplex szám ugyanannyiszoros gyöke, mint a konjugáltja. Minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. A valós fölötti irreducibilis polinomok leírása.
- A Schönemann-Eisenstein-kritérium a racionális számok teste fölötti irreducibilitásra. Következmény: racionális fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom létezik. A körosztási polinom; rekurzív képlete, kiszámítása, ez egész együtthatós. A körosztási polinom irreducibilis (bizonyítás nélkül). Az irreducibilis polinomok jellemzése az egész együtthatós polinomok gyűrűjében (bizonyítás nélkül), itt is érvényes a számelmélet alaptétele.
- A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete, ebben a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis. A negyedfokú egyenlet (csak vázlat).
- Vektorok és mátrixok. A lineáris egyenletrendszer fogalma és megoldása Gauss-eliminációval. Vezéregyesek, tilos sorok, szabad és kötött változók, a megoldások általános képlete és száma. Az egyetlen összefüggés az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között: ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás. Homogén lineáris egyenletrendszer, triviális megoldás, ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor van nemtriviális megoldás. A Cramer-szabály.
- A sík vektorai, helyvektorok, összeadás és skalárral szorzás. Test fölötti oszlopvektorok, összeadás, skalárral szorzás. Vektorok és mátrixok műveletei, műveleti tulajdonságok, a négyzetes mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. Az egységmátrix és az inverz mátrix fogalma.
- A determináns. A determináns mint négyzetes mátrixhoz rendelt szám bizonyos tulajdonságokkal: minden oszlopában lineáris, ha két oszlop egyenlő, akkor az eredmény nulla. A determináns oszlopcserénél előjelet vált, egy oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adva az értéke nem változik, felső háromszögmátrix determinánsa. A kétszer kettes és háromszor hármas eset. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával, így az oszlopokra megkövetelt tulajdonságok sorokra is érvényesek. A determináns kiszámítása Gauss-eliminációval. A Vandermonde-determináns. A determinánsok szorzástétele. Előjeles al-determináns, a kifejtési tétel (bizonyítás nélkül). A ferde kifejtési tétel, az inverz mátrix képlete. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Invertálás Gauss-eliminációval. A determináns képlete, a fenti tulajdonságok

egy részének bizonyítása.

- Absztrakt algebrai alapfogalmak. Művelet, asszociativitás, kommutativitás. Gyűrű; kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű; test. Elemi számolási szabályok. Invertálható elem, egész kitevőjű hatványok és tulajdonságaik, többszörös. Nullosztómentes gyűrűben szabad egyszerűsíteni. Minden test nullosztómentes.
- Összeadás és szorzás egy m modulusra nézve, a \mathbf{Z}_m gyűrű, ennek invertálható elemei az m -hez relatív prím elemek. Ez a gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes ha test, akkor és csak akkor, ha m prímszám.
- A binomiális együtthatók alaptulajdonságai, a binomiális tétel. A permutáció fogalma. Inverzió, permutáció paritása (előjele). A páros permutációk száma.