Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2018. jún. 07.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. **Mindkét kvantort expliciten írjuk ki a megfogalmazásban,** és ne használjuk a generált altér fogalmát.

Minden $v \in V$-hez **létezik** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

2. Definiáljuk a bal oldali nullosztó fogalmát $\mathrm{Hom}(V)$-ben.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ bal oldali nullosztó, ha $A \neq 0$, és van olyan $0 \neq B \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $AB = 0$.

3. Definiáljuk **halmaz-jelöléssel** az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés magterét.

$\mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \,:\, A(v) = 0_W\}$.

4. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

5. Mikor áll az u és w vektorokra felírt háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség? (Magát az egyenlőtlenséget nem kell felírni.)

Akkor és csak akkor, ha u és w egyike a másik **nemnegatív** skalárszorosa.

6. Mit jelent az, hogy a Jordan-alak **egyértelmű?** A választ a **hasonlóság** fogalmát felhasználva adjuk meg.

Két $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha Jordan-alakjuk a blokkok sorrendjétől eltekintve megegyezik. *Másképp:* Ha egy mátrix hasonló két Jordan-alakú mátrixhoz is, akkor ezek csak a blokkok sorrendjében térhetnek el.

7. Definiáljuk az A lineáris leképezés rangját (ne a mátrixa segítségével!).

$r(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

8. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

9. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor önadjungált. (Az önadjungált és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor önadjungált, ha minden sajátértéke valós.

10. Definiáljuk a V és W alterek direkt összegének fogalmát. Mi ennek a jele?

A $V + W$ összeget direkt összegnek nevezzük, ha $V \cap W = \{0\}$, jele $V \oplus W$.