NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben az összeadást úgy, hogy bármely két vektor összege az origó, azaz $(0,0)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$0+v=v$, pl. $v=(1,2)$. (Más n nullelem sincs, mert minden v-re $0=n+v=v$ teljesülne).

12. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „A $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{2\times 2}$ vektortér valós determinánsú mátrixai alteret alkotnak.”

Pl. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ közöttük van, de az $1+i$-szerese nincs.

13. Adjuk meg az u, v, w vektorokat úgy, hogy $\{u,v\}$ és $\{v,w\}$ független legyen, de $\{u,w\}$ ne legyen az.

Pl. $x, x^2, 2x \in \mathbb{R}[x]$

14. Egy 5 elemmel generált altérben van kételemű független és 3 elemű összefüggő rendszer is. Mennyi lehet a dimenziója?

2, 3, 4, 5.

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ minden $\lambda,\mu\in T$ testelem és A lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A összegtartó.
(L) A skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(V) Vektortéraxióma.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((\lambda+\mu)A\big)(v) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(\lambda+\mu)\big(A(v)\big) = \quad \boxed{\text{V}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big)+\mu\big(A(v)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(\lambda A)(v)+(\mu A)(v) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$(\lambda A+\mu A)(v)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A: V\to\mathbb{C}$, melyre $A(p)=p(i+2)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

18. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixhoz $M - M^T$-t rendel?

3

19. Mi a térben az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra tükrözés determinánsa?

-1

20. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^7)$-nek az $1 + i$ sajátértékhez tartozó sajátaltere kétdimenziós, akkor mennyi lehet $r(A - I - iI)$?

5

21. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix sajátértékei $\pm i$. Mi lehet M^2?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

22. Maximum hány páronként nem hasonló olyan $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrix létezik, melyre $M^2 = 0$?

3

23. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^7)$ minimálpolinomja $x^4 - x^2$. Mi lesz A^2 minimálpolinomja?

$x^2 - x$

24. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, u + 2iv\rangle$?

-1

25. Adjunk példát olyan normális $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixra, melynek két különböző sajátértéke van, és melyre $M(1,1)^T = (i,i)^T$.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

26. Egy önadjungált mátrix karakterisztikus polinomja $x^k - 1$. Mik k lehetséges értékei?

$k = 2$ (vagy 1).

27. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „minden invertálható normális mátrix egy unitér mátrix komplex számszorosa.”

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

28. A sík egy A lineáris transzformációjának sajátvektora $(1,1)$. Adjuk meg A^T egy sajátvektorát.

Pl. $(1,-1)$

29. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az (i,i,i) vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$.

30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.”

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$