Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2018. március 22.) — eredmények és pontozás

1. Az $a = 0$ nyilván megfelelő (1 pont mindkét megoldásban). Az altér generátorainak gyöke a, ezért minden lineáris kombinációnak is. Így ha x benne van az altérben, akkor x-nek is gyöke a, tehát $a = 0$ (5 pont). *Második megoldás:* ha $x = \alpha(x^2-a^2)+\beta(x^2-ax)+\gamma(x-a)$, akkor $\alpha+\beta = 0$, $-\beta a+\gamma = 1$ és $\alpha a^2+\gamma a = 0$ (3 pont). Innen $\alpha a+\gamma = 1$, azaz $0 = \alpha a^2+\gamma a = a$ (2 pont).

2. A bázistranszformáció képletének alkalmazásához az új bázis elemeit fel kell írni a régi segítségével. Nyilván $(2,2) = 1\cdot(1,0)+1\cdot(1,2)$ és $(1,0) = 1\cdot(1,0)+0\cdot(2,2)$, ezért $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (1 pont), így a képlet szerint az új mátrix $S^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}S = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (1 pont). A $(3,2)$ pont képének kiszámításához meg kell határoznunk e pont koordinátáit a régi bázisban (számolhatnánk az új bázisban is). Nyilván $(3,2) = 2\cdot(1,0)+1\cdot(1,2)$. Ezért a $[C(v)] = [C][v]$ képletet a régi bázisban alkalmazva $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$, vagyis az $(1,2)$ pont képe $3\cdot(1,0)+3\cdot(1,2) = (6,6)$ (3 pont).

3. Az A nem lineáris, mert a nullapolinomot 1-be viszi és nem nullába (2 pont). A B lineáris (0 pont), az $\big((1,x,x^2,x^3),(1,i)\big)$ bázispárban a mátrixa

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

4. Ha egy valós együtthatós polinomnak gyöke az i, akkor gyöke az $\bar{i} = -i$, és ezért kiemelhető belőle $(x-i)(x+i) = x^2+1$ (1 pont). Ezért U kétdimenziós, bázisa például $x^2+1, x(x^2+1)$ (1 pont). A V altér háromdimenziós, bázisa például x, x^2, x^3 (1 pont). A metszetben azok a polinomok vannak, amelyek $x(x^2+1)$-gyel oszthatók, és így egydimenziós alteret kapunk, melyben bázis maga $x(x^2+1)$ (1 pont). Ekkor pedig $\dim(U+W) = \dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W) = 2+3-1 = 4$ (1 pont). Ezért $U+W$ nem lehet valódi altér a 4-dimenziós V-ben (1 pont), bázis például $1, x, x^2, x^3$.

5. A W_2 nem altér, mert például az identitás és az $y = x$-re tükrözés összegének mátrixa $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, ami nem tartozik hasonlósági transzformációhoz (2 pont), hiszen nem invertálható és nem is nulla (például az $(1,-1)$ vektort nullába képzi, és így a hasonlóság aránya csak nulla lehetne, de $(1,1)$-et nem képzi nullába). A W_1 dimenziója 2 (1 pont). Ha B mátrixa a szokásos bázisban $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, akkor $B \in W_1$ akkor és csak akkor, ha $M[(1,0)] = [(0,0)]$, azaz $a = c = 0$. Ezért bázist alkot például az a két geometriai transzformáció, ami a $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixhoz tartozik (3 pont). (Az utóbbi az y-tengelyre való merőleges vetítés.)

6. Elegendő megmutatni, hogy F és F^2 függetlenek, de generálják F többi hatványát. Nyilván F^k a $30k$ fokos forgatás, ezért F, F^2 és F^3 mátrixa a szokásos bázisban rendre $(1/2)\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $(1/2)\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, speciálisan F és F^2 függetlenek (3 pont). Az $\alpha[F]+\beta[F^2] = [F^3]$ lineáris egyenletrendszert megoldva $\alpha = -1$ és $\beta = \sqrt{3}$ (2 pont). Innen F^{k-3}-nal szorozva $k \geq 3$ esetén $F^k = \sqrt{3}F^{k-1}-F^{k-2}$, és így ha $k \geq 3$, akkor F^k benne van az F alacsonyabb hatványai által generált altérben (1 pont).