# 1. A permutáció fogalma

### A permutáció mint átrendezés

**Tétel**
Ha van $n$ tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: *$n$ faktoriális.*

### Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. *Átrendezhetjük* így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges. Az átrendezés egy $f$ *függvény*:

$$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma}, \quad f(\text{barack}) = \text{szilva}.$$

Az $f(x)$ az $x$ helyére tett tárgy. Az $f$ *kölcsönösen egyértelmű.*

### A permutáció mint bijekció

**Definíció (K4.2.1)**
Legyen $X$ (rendszerint véges) halmaz. Az $X$ halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az $X$ halmaz *permutációinak* nevezük. Ezek összességét $S_X$ jelöli. Rövid jelölés: $S_n$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az $S_n$ elemszáma $n!$.

### A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$. Mindkét sorban felsoroljuk az $X$ halmaz összes elemét. Az $f$ függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képzi.

### Kompozíció

**Definíció (K2.2.3)**
Az $f$ és $g$ függvények *kompozíciója* az az $f \circ g$ függvény, melyre
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ minden $x$-re $g$ értelmezési tartományából. Tehát először $g$-t, azután $f$-et alkalmazzuk.

<u>Analízisben</u> a neve *összetett függvény*: ha $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$,
akkor $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ és $(g \circ f)(x) = \sin^2(x) (= (\sin x)^2)$.
Általában $f \circ g \neq g \circ f$ (a kompozíció művelete *nem kommutatív*).

**Tétel (K2.2.4. Gyakorlat)**
A kompozíció asszociatív: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Például $(f \circ g)(4) = f\big(g(4)\big) = f(2) = 4$.

**Transzpozíció**

**Definíció (K4.2.6)**
Legyen $X$ halmaz és $x \neq y \in X$. Az $x$ és $y$ *cseréje* az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az $x$-et $y$-ba, az $y$-t $x$-be viszi, a $X$ többi elemét pedig *fixen hagyja*, azaz saját magába képzi. Az ilyen permutációkat cserének vagy *transzpozíciónak* hívjuk.

**Példa**

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq (2,3) \circ (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Minden permutáció cserék szorzata**

**Elnevezés (K2.2.3)**
Ezentúl permutációk kompozícióját *szorzásnak* nevezzük, és *egymás mellé írással* jelöljük.

**Tétel (K4.2.5)**
Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

**Bizonyítás**
Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van, ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló. Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló. Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

A szükséges cserék száma a legrosszabb esetben is eggyel kevesebb, mint a tárgyak száma.

**Példák cserék szorzatára**

**Példa**

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ előállítása cserék szorzataként:}$$

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz. Azaz $f$ *többféleképpen is felírható* cserék szorzataként.

**Tétel (vö. K 155–156. oldal)**
Nem fordulhat elő, hogy egy permutáció páratlan sok és páros sok csere szorzataként is felírható.

# 2. Permutáció előjele

### Az inverzió fogalma

**Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)**
Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek *inverzióban állnak.* Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

**Példa**

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Az alsó sor $\binom{5}{2}$ párja: 24, 25, 23, 21, 45, 43, 41, 53, 51, 31.
Inverzió: $21, 43, 41, 53, 51, 31$. Nem inverzió: $24, 25, 23, 45$. Az inverziók száma tehát 6.
Az $S_n$ egy permutációjának maximum $\binom{n}{2}$ inverziója lehet.

### Permutáció előjele

**Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)**
Az $f$ permutáció *páros*, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az $f$ *előjele* $+1$. <u>Jelölés:</u> $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az $f$ permutáció *páratlan*, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az $f$ *előjele* $-1$. <u>Jelölés:</u> $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma $J$, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

**Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)**
Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. <u>Biz:</u> Algebra3-ban.

**Állítás (K4.2.12)**
Minden transzpozíció előjele $-1$. <u>Biz:</u> később.
Ezért a páros permutációk páros sok csere, a páratlan permutációk páratlan sok csere szorzataként kaphatók.

### Permutáció inverze

**Definíció (K2.2.11)**
Az *identikus* permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). <u>Jele:</u> *id*. Tehát $id(x) = x$. Az $f$ permutáció *inverze* az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit $f$ elvégzett: $g\big(f(x)\big) = x = f\big(g(x)\big)$.

**Állítás (K4.2.11)**

(1) Tetszőleges $f$ permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges $f$ permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges $f$ permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)–(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik: $\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1}) = \mathrm{sg}(id) = 1$.

**Csere előjele**

**Állítás**
Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele $-1$. □

**Állítás (K4.2.12)**
Általában, az $(i,j)$ csere előjele is $-1$.

**Bizonyítás**
Legyen $g$ egy olyan permutáció, ami az 1-et $i$-be, a 2-t $j$-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$. Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}\big((1,2)\big)\mathrm{sg}(g^{-1}\big) = (-1)\mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}(g^{-1}\big) = -1.$ □

**A páros permutációk száma**

**Állítás (K4.2.16)**
Ha $n \geq 2$, akkor $S_n$-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

**Bizonyítás**
Elég: *ugyanannyi* páros és páratlan permutáció van. Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ez az $f$*-hez* $f \circ (1,2)$*-t* rendel. Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel. *Kölcsönösen egyértelmű*, mert *önmagának az inverze*: $\big(f \circ (1,2)\big) \circ (1,2) = f \circ \big((1,2) \circ (1,2)\big) = f \circ id = f$, azaz ha kétszer csináljuk, visszakapjuk az eredeti $f$-et. □

Ugyanez $(1,2)$ helyett minden $(i,j)$-re megy.

# 3. A determináns definíciója

**A $3 \times 3$-as determináns elemzése**

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak *a determináns minden sorában* van tényezője. A második indexek egy *PERMUTÁCIÓT* adnak, pl. $2, 3, 1$. Ezért *a determináns minden oszlopában is van egy tényező.* A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió). A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ezek előjele $-1$ (rendre 3, 1, 1 darab inverzió).

**A $3 \times 3$-as determináns permutációs képlete**

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\ = {} & \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} + \\ & + \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} + \\ & + \mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)} + \mathrm{sg}(f_6)a_{1f_6(1)}a_{2f_6(2)}a_{3f_6(3)} = \\ & = \sum_{f \in S_3} \mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)}\,. \end{aligned}$$

**Az $n \times n$-es determináns definíciója**

**Definíció (F1.2.2. Definíció)**
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az $M$ determinánsa legyen

$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$

**Példa**
Az $5 \times 5$-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

permutáció előjele $+1$ (láttuk, hogy 6 inverzió van).
Az ehhez tartozó tag $+a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}$.
<u>FONTOS:</u> e szorzat előjelét a permutáció előjele, és *NEM* a kifejtésnél definiált sakktáblaszabály adja!

# 4. A determináns alaptulajdonságai

### A megkívánt tulajdonságok

**Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)**
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

### A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)}a_{2f(2)}\dots a_{nf(n)}$.

**Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)**
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk $\lambda$-val.
Azaz $a_{1j}$ helyére $\lambda a_{1j}$ kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője $a_{1j}$ alakú alkalmas $j$-re, és több tényező a determináns első sorából nincs. Ezért az új determinánsban minden tényező $\lambda$-val szorzódik. Így a teljes összeg, azaz a determináns is $\lambda$-val szorzódik. □

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk $\lambda$-val, mert *az összeg mindegyik tagjában minden sorból és oszlopból pontosan egy tényező van.*

**Az összegtartás**

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

**Összegtartás (F1.3.2. Tétel)**
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz $a_{1j}$ helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$. Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban $b_{1j}$, illetve $c_{1j}$ szerepel. □

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.
<u>HF:</u> $3 \times 3$-asra részletezni ezt a bizonyítást.

**$3 \times 3$-as felső háromszögmátrix**

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

**Felső háromszögmátrix**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. □

**Elemzés**
A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex, azaz $a_{ij}$, ahol $i > j$.

A megmaradó tag az *identikus permutációhoz* tartozik.

**Általános felső háromszögmátrix**

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: *ha mindenki a saját helyén ül.*
<u>Mert:</u> Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

**Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)**
Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden $i$-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id) a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. Mivel $\mathrm{sg}(id) = 1$, ez tényleg a főátlóbeli elemek szorzata. □

**$3 \times 3$-as: két oszlop egyenlősége**

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

**A második és a harmadik oszlop egyenlősége**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik $i$-re. A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert $a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.
*Az előjelezés arra való, hogy általában is minden így kiessen.*

**Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)**

$$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}.$$

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az $i$-edik és a $j$-edik *sor* egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.
$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.
$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = \underline{a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}}$
(megcseréltük a szorzat $i$-edik és $j$-edik tényezőjét). Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja $g$.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$. Ezért $g = f \circ (i, j)$.
Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = -\,sg(f)$.
Tehát a sárga és <u>kék</u> tagok kiejtik egymást. Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat, mert $\big(f \circ (i,j)\big) \circ (i,j) = f$. Tehát minden tag kiesik. □

**$3 \times 3$-as: a transzponált determinánsa**

$$M = ((a_{ij})) \implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$
$$M^T = ((b_{ij})) \implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -$$
$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,.$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = \underline{a_{12}a_{23}a_{31}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$. Előjel: $-1$.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$. Előjel: $-1$.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$. Előjel: $-1$. □

**$3 \times 3$-as: a transzponáltbeli permutációk**

$b_{12}b_{23}b_{31} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás *inverzei.*

$b_{13}b_{22}b_{31} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás *inverzei.*

Az összes többi tagnál is inverz permutációkat kapunk.

**A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)**

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum\limits_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum\limits_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)}b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = \underline{a_{1g(1)}a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$. Az $a_{ij}$ akkor szerepel a <u>kék</u> szorzatban, ha $g(i) = j$. A sárga és <u>kék</u> szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért $i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal. Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz. Az $f \leftrightarrow f^{-1}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $S_n$-en. $\square$

**A tulajdonságok összefoglalása**

**Ma beláttuk:**

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

**Állítás**

Az <u>(1)</u> és <u>(2)</u> tulajdonságok, valamint az, hogy az egységmátrix determinánsa 1, a determináns értékét *egyértelműen meghatározzák.* <u>Biz:</u> Gauss-elimináció.

**A többi tulajdonság**

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

**Múltkor láttuk:**
Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) *oszlopvektorokkal* való egyszerű számolás.
A (8) az *inverz aldeterminánsos képletéből* következik.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

# 5. Összefoglaló

**A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag**

**Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)**
Permutáció, kompozíció, inverz, *id*, transzpozíció. Inverzió, permutáció előjele. A determináns definíciója.

**Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)**
Minden permutáció transzpozíciók szorzata. A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele. Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma. A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.

(Több most bizonyított tétel kimondása a múltkor szerepelt. Ezeket a bizonyításokat csak a vizsgán kérjük majd számon.)