Jacobson kommutativitási tétele

Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* című tankönyvében bizonyítás nélkül szerepel Jacobson alábbi eredménye:

1. Tétel [7.9.12]. *Ha az R gyűrű minden r eleméhez van olyan $n > 1$ egész, hogy $r^n - r$ benne van R centrumában, akkor R kommutatív.*

Ez a tétel nem egységelemes gyűrűkre is érvényes, azonban a fenti tankönyvben a Jacobson-radikál elméletét, sőt a modulusok elméletét is csak egységelemes gyűrűben tárgyaljuk, hogy a prezentáció egyszerűbb, követhetőbb legyen. A célunk, hogy belássuk a fenti tétel következő speciális esetét.

2. Tétel. *Ha az R egységelemes gyűrű minden r eleméhez van olyan $n > 1$ egész, hogy $r^n - r = 0$, akkor R kommutatív.*

Megjegyezzük, hogy a könyv 7.9.18. feladata ennek a tételnek az az esete, amikor az R gyűrű véges. A szükséges előismeretek a könyv 7.9. szakaszában olvashatók. Az alábbiakban R mindig olyan (egységelemes) gyűrűt jelöl, amelyre a 2. Tétel feltétele teljesül. Vegyük észre, hogy ez a feltétel **minden részgyűrűre és minden faktorgyűrűre öröklődik.**

3. Állítás. *Az R gyűrű minden elemének van idempotens hatványa, és ezért a Jacobson-radikálja nulla.*

Bizonyítás. Legyen $r \in J(R)$ és $e = r^{n-1}$. Ekkor $e^2 = r^{2n-2} = r^n r^{n-2} = rr^{n-2} = r^{n-1} = e$. Tehát e idempotens eleme $J(R)$-nek, ami a 7.9.5. Gyakorlat szerint csak $e = 0$ esetén lehetséges. De akkor $r = r^n = er = 0$. □

4. Állítás. *Az R gyűrű ferdetestek szubdirekt szorzata.*

Bizonyítás. A 7.9.11. Tétel szerint $R \cong R/J(R)$ előáll olyan S gyűrűk szubdirekt szorzataként, amelyek mindegyike R-nek homomorf képe, és amelyek sűrű mátrixgyűrűk a 7.9.10. Sűrűségi Tétel értelmében. Legyen S a D ferdetest fölötti K vektortér sűrű részgyűrűje, amire teljesül a 2. Tétel feltétele. Elegendő belátni, hogy K dimenziója 1, mert ekkor $S \cong D$.

Tegyük föl, hogy u és v lineárisan függetlenek K-ban D fölött. Mivel S sűrű, van olyan $s \in S$, melyre $s(u) = v$ és $s(v) = 0$. A feltétel szerint $s^n = s$ alkalmas $n > 1$ egészre. Ekkor $s^2(u) = s(v) = 0$, és így $s^n(u) = 0$. De $s^n = s$, azaz $s(u) = 0$, ami ellentmond annak, hogy $s(u) = v \neq 0$. □

A továbbiakban legyen D ferdetest, amely teljesíti a 2. Tétel feltételét, elegendő belátnunk, hogy D kommutatív. Ha 1 a D egységeleme és $2 = 1+1$, akkor a $2^n = 2$ feltételből láthatjuk, hogy D karakterisztikája nem nulla. Legyen ez a karakterisztika a p prímszám.

5. Állítás. *Tegyük föl, hogy D nem kommutatív. Ekkor van olyan $a, b \in D$, hogy bab^{-1} az a-nak önmagától különböző hatványa.*

Bizonyítás. Legyen P a D prímteste, ekkor D vektortér P fölött. Jelölje H az ezen értelmezett P-lineáris transzformációk gyűrűjét. Mivel D nem kommutatív, van olyan $c \in D$, ami nincs benne D centrumában. Az $L(x) = cx$ és $R(x) = xc$ összefüggések H két elemét definiálják. Mivel D-ben a szorzás asszociatív, $RL = LR$.

Feltételünk szerint c gyöke egy $x^n - x$ alakú polinomnak, és ezért algebrai P fölött. Jelölje $T = P(c)$ az általa generált résztestet, ami tehát véges, elemszáma legyen p^k. Ekkor $c^{p^k} = c$, tehát $L^{p^k} = L$ és $R^{p^k} = R$. Mivel $LR = RL$, és a H gyűrűben is minden elem p-szerese nulla, ezért az $M = L - R$ elemre is teljesül (a binomiális tétel miatt), hogy $M^{p^k} = M$.

Jelölje $I \in H$ az identikus leképezést D-n. Mivel T egy p^k elemű véges test, ezért

$$x^{p^k} - x = \prod_{t \in T} (x - t)\,,$$

ahonnan H-ban

$$x^{p^k} - x = \prod_{t \in T} (x - tI)$$

teljesül minden olyan x elemre, amely minden tI transzformációval fölcserélhető. A fenti $M = L - R$ ilyen elem, és így

$$0 = M^{p^k} - M = \prod_{t \in T} (M - tI)\,.$$

E szorzat tényezői is páronként fölcserélhetők, írjuk $M = M - 0 \cdot I$-t a legjobboldali helyre. Mivel c nincs D centrumában, van olyan x, hogy $M(x) = cx - xc \neq 0$. De a fenti szorzat nulla, ezért a többi tényezők mindegyike nem lehet injektív leképezés. Így van olyan $0 \neq t \in T$ és $0 \neq b \in D$, hogy $(M - tI)b = 0$. Azaz $cb - bc - tb = 0$, ahonnan $bcb^{-1} = c - t \neq c$.

Mivel T elemei a c-nek P-beli együtthatós polinomjai, ezért a b-vel való konjugálás a T testet önmagába képzi. Legyen $a \in T$ a T multiplikatív csoportjának egyik generátoreleme. Ekkor $bab^{-1} = a^i$ alkalmas i-re, de $a^i \neq a$, mert különben a b-vel való konjugálás identikus lenne T-n, holott c-t nem viszi önmagába. □

A fenti állításból kapott b multiplikatív rendje is véges a 2. Tétel feltétele miatt. Legyen G az a és b által generált részcsoport D multiplikatív csoportjában. Ebben $T^\times = \langle a \rangle$ véges normálosztó, hiszen b ezt normalizálja. Mivel b képe generálja a $G/T^\times$ faktorcsoportot, ez ciklikus, tehát véges, és így G is véges. A G elemeinek P-beli együtthatós lineáris kombinációi véges részgyűrűt alkotnak D-ben. Ez nullosztómentes, tehát ferdetest, ami ellentmond Wedderburn tételének hiszen ez a részgyűrű nem kommutatív. Ezzel a 2. Tételt beláttuk. □

Megjegyzések

A bizonyításban szereplő $M(x) = cx - xc$ lineáris operátort *belső derivációnak* hívják, mert könnyen láthatóan teljesíti az analízisből ismert Leibniz-szabályt: $M(xy) = M(x)y + xM(y)$.

A most belátott tétel illusztráció arra nézve, hogy hogyan lehet a gyűrűk struktúraelméletét konkrét feltételek esetében alkalmazni. Érdemes áttekinteni a folyamat állomásait, ahogy az állítások mentén visszafelé haladva egyre szélesebb gyűrűosztályokra bizonyítunk: ferdetestre, sűrű mátrixgyűrűre, ilyenek szubdirekt szorzatára, végül tetszőleges gyűrűre.