Szigorlati tájékoztató

Mik a követelmények a szigorlaton? A kétéves algebrai tanulmányokat szóbeli szigorlat zárja. Ez nem egy egyesített kollokvium, a hangsúly a négy féléves anyag **átfogó megértésén** van. A vizsgáztató azt próbálja mérni, hogy ki milyen összefüggő képet alakított ki az anyag egészéről. Ezért nemcsak olyan jellegű kérdéseket tesz fel, amilyenek az írásbeli vizsgákon is szerepeltek (tehát egy-egy fogalom vagy tétel megértését ellenőrzik, illusztráló példákat, vagy ellenpéldákat kérnek), hanem olyanokat is, melyek a különböző félévekben elhangzott definíciók, tételek közötti kapcsolatokra vonatkoznak.

Alapkövetelmény minden elhangzott definíciónak és az összes tétel (lemma, stb.) állításának az értése és pontos ismerete. Az első három félévből a bizonyításokat nem kell tudni, de azt igen, hogy melyik tétel melyikből következik.

Hogyan zajlik le a szigorlat? A szigorlat kéttagú bizottság előtt történik, időtartama legfeljebb 40 perc. Az eredményhirdetés rendszerint a vizsganap végén van. A vizsgázó hallgató hozzájárulása esetén a szigorlat nyilvános, bárki beülhet meghallgatni.

Minden vizsgatétel két átfogó témából áll, és valamelyikhez egy, a negyedik félévi anyagban szereplő tétel bizonyítása is csatlakozik. A szigorlati tematika nem tételjegyzék, az a cél, hogy mindenki önállóan, a felkészülési idő alatt szedje össze az adott témához kapcsolódó ismereteit. Ezért a témapárok összeállítása naponként és bizottságonként is változhat.

A bizottságok azonos szempontok szerint vizsgáztatnak. A vizsgáztatók a tételeket egymástól függetlenül, külön-külön osztályozzák. Az egyes tételek nem egyforma súllyal esnek latba. Ha valaki valamelyik átfogó tételt nem tudja legalább kettesre, vagy ha az efélévi bizonyításnak még az ötletére sem emlékszik, akkor automatikusan elégtelent kap. Aki ezt a bizonyítást nem tudja legalább elégséges szinten, a szigorlata legfeljebb kettes lehet. Az eddigi osztályzatok a szigorlat eredményét semmilyen irányba sem befolyásolják.

Mikor lesznek a szigorlatok? A négy szigorlati bizottság a következő:

1. Freud Róbert és Csörgő Piroska.
2. Hermann Péter és Szabó Csaba.
3. Kiss Emil és Ágoston István.
4. Kiss Emil és P. Kovács Katalin.

(elsőnek az elnök neve áll). A bizottságok szabadon választhatók, a következő axiómák figyelembevételével.

- Egy napon ugyanannál a bizottságnál legfeljebb 8-10 ember vizsgázhat.
- Minden bizottság legfeljebb harminc embert vizsgáztathat.
- Minden bizottságnak legfeljebb [vizsgázók száma/8] + 1 vizsganapja lehet.

További személyes kérésem (ez nem axióma), hogy lehetőleg ne menjetek olyan bizottsághoz, amelyben a gyakvezéretek van. A bizottságok egyformán szigorúak, és egyformán kérdeznek, tehát szerintem a jó időpont kiválasztása fontosabb, mint a bizottság összetétele. Ebben igyekszem majd maximális segítséget nyújtani.

Az eddigiek csak az első vizsgára vonatkoznak. Az utóvizsgák során a bizottságok változhatnak, és nincs mód választásra. Ha valaki halasztani akar, akkor bármelyik bizottság bármelyik létező üres időpontjára jelentkezhet (az utóvizsgák napjait is beleértve), de ilyen célból külön vizsganapot nem iktatunk be. E megszorítások azért szükségesek, mert a tanszék igen magas vizsgaterhelése miatt még így is nehéz megfelelő mennyiségű vizsganapot biztosítani. Az időpontokat a felvételik, államvizsgák miatt korán rögzíteni kell.

Tanácsok a vizsgára

Milyen egy átfogó tétel? Például ha a húzott tétel az *izomorfizmus,* akkor a felkészülési idő alatt olyan összefoglalót érdemes írni, ami kiterjed az izomorfizmus általános definíciójára (mi a közös a gyűrűk, csoportok, algebrák izomorfizmus-definíciójában, mik az izomorf struktúrák közös tulajdonságai, mi az izomorfia-elv), azokra a tételekre, amelyek fontos izomorfizmusokat adnak meg (például a Cayley-tétel, vektorterek izomorfizmusai, mátrixalgebra és lineáris transzformációk). Érdemes taglalni azokat a módszereket, melyekkel két struktúráról bizonyítható, hogy nem izomorfak (például csoportoknál az elemrendek, kommutativitás vizsgálata).

Mi a közbekérdezések célja? A vizsgáztatónak le kell mérnie, hogy egy probléma láttán a diák jó irányba indul-e, tisztában van-e azzal, hogy a probléma természete milyen eszközök alkalmazását igényli, eszébe jutnak-e a tananyag kapcsolódó tételei. Ezért próbál olyan kérdéseket feltenni, amelyre a vizsgázó nem tudja a **kész** választ a memóriájából előhúzni. Ezekre a kérdésekre nincs huzamosabb gondolkodási idő, hiszen éppen az a cél, hogy a gondolkodás folyamatát lássuk. A vizsgázó technikai érettségét is ellenőrizni kell: ismeri-e a bizonyítási módszereket, képes-e arra, hogy egy definíciót kezelni tudjon (teljesül-e egy adott szituációban, igaz-e egy rá vonatkozó elemi állítás).

Hogyan taktikus válaszolni ezekre a kérdésekre? A vizsgáztató gondolkodás eredményét várja. Tehát tippelni, halvány emlékek alapján meggondolatlanul felelni nem érdemes, mert úgyis jön a „miért" kérdés. Ne ijedjünk meg attól, ha nem látjuk azonnal a választ. A vizsgáztató nehéz kérdést is feltehetett azzal a szándékkal, hogy segít a megoldásban. Szükséges, hogy a vizsgázó viszonylag rendszeresen adjon „életjelet" arról, hogy hol tart a gondolkodásban. Azaz érdemes elkezdeni sorolni a kérdéshez tartozó (de tényleg releváns) tételeket, definíciókat, módszereket. Ez a tudásunkat bizonyítja a tanár előtt akkor is, ha az adott gondolat nem vezet a megoldáshoz. A vizsgáztató nem akarja zavarni a diákot a gondolkodásban, de egy idő után segíteni kezd. Ezért ha már csak egy pillanatra vagyunk mondandónk megfogalmazásától, akkor érdemes a vizsgáztatót félbeszakítani, és még egy kis időt kérni.

Mi befolyásolja az osztályzatot? A vizsgáztató azt figyeli, hogy a vizsgázó milyen szinten integrálta magában az órákon elhangzottakat, mennyire érett a matematikai gondolkodása, hogyan kezeli a technikai eszközöket. Nem baj, ha a vizsgázó valamelyik kérdésnek nem jut a végére, de rontja a jegyet, ha olyan lépésnél is segítségre szorul, aminek a végrehajtását ismernie kellett volna, vagy olyan kérdésekre, amiket azonnal látni illik, rosszul, vagy nem válaszol. Nem léphet túl a másodéven az, aki logikai hibákat ejt (nem az elszólásokra gondolunk), és természetesen a tényanyagot tudni kell.

Hogyan készüljünk a szigorlatra? Először az utolsó félév anyagát kell megtanulni, ugyanúgy, mint az eddigi vizsgákra való készülés során. Ezután ismételjük át a teljes kétéves anyagot. Minden egyes definíció és tétel kapcsán gondoljuk meg, mely korábbi és későbbi anyagrészekhez kapcsolódik, nem általánosít-e egy korábban tanult fogalmat vagy állítást, hol használtuk fel a későbbiekben. A gyakorlatokon szerepelt feladatsorok átismétlése rendkívül hasznos, főleg a fogalmak megértését segítő elemi feladatoké.

Algebra és számelmélet szigorlati tematika
(matematika tanári szak, 1997–99)

Komplex számok. Felépítések. Algebrai és trigonometrikus alak. Szorzás, gyökvonás, egységgyök és rendje, primitív n-edik egységgyök. Rendezhetőség. Kvaterniók.

Polinomok és polinomfüggvények. Kapcsolatuk véges és végtelen test felett. Gyök, többszörös gyök, formális derivált, gyöktényezős alak, a gyökök száma, gyökök és együtthatók közötti összefüggés. Az algebra alaptétele és következményei. Irreducibilis polinomok $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett. Körosztási polinom.

A számelmélet alaptétele. Gyűrű fogalma, kommutativitás, nullosztómentesség. Oszthatóság, egység és asszociált, prím és felbonthatatlan elem. Kitüntetett közös osztó és közös többszörös. Euklideszi gyűrű és algoritmus. Alaptételes és főideálgyűrű. Példák: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, páros számok, $T[x]$ (T test), Gauss-egészek (és -prímek), $\mathbb{Z}[x]$ számelmélete. Az alaptétel alkalmazásai: kanonikus alak, teljes hatványok, az osztók száma és összege.

Kongruenciák. Alaptulajdonságok, maradékosztályok. Lineáris kongruenciák, szimultán kongruencia-rendszerek. A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport, $\varphi(n)$, rend, Euler-Fermat-tétel, Wilson-tétel. Primitív gyök, binom kongruenciák, kvadratikus maradékok, alkalmazásaik.

Prímszámok. Számuk, eratosztenészi szita, nevezetes problémák. Mersenne- és Fermat-prímek, alkalmazásaik. Prímtesztek, álprímek, titkosírás. Csebisev és Dirichlet tételei, a prímek eloszlása (hézagok, alsó és felső becslés, a prímszámtételek, a prímek nagysága).

Diofantikus egyenletek. Lineáris egyenlet. Pitagoraszi számhármasok, Fermat-sejtés. Négyzetszámokból való előállítás, Waring-problémakör. Megoldási módszerek.

Lineáris algebra. Vektortér, altér, generált altér, generátorrendszer, függetlenség, bázis, dimenzió. Lineáris leképezések, képtér, magtér, mátrix adott bázispárban, bázistranszformáció. Vektorterek izomorfizmusa. Műveletek lineáris leképezésekkel és mátrixokkal.

Leképezés és mátrix determinánsa. Elemi tulajdonságok, kifejtési tételek, szorzástétel, Vandermonde-determináns. Rang. Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszere, az összes megoldás áttekintése. A megoldhatóság feltétele, Cramer-szabály.

A lineáris transzformációk algebrája, inverz és nullosztó, sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus és minimálpolinom. Invariáns alterek, diagonalizálhatóság, a Jordan-féle normálalak. Alkalmazás: lineáris rekurzió.

Csoportok. Csoport, részcsoport, elemrend, ciklikus csoport, generálás. Homomorfizmus, normálosztó, faktorcsoport, homomorfizmus-tétel. Permutáció előjele, permutációcsoport, szimmetriák leszámlálása, a szimmetrikus, az alternáló és a diédercsoport, mátrixcsoportok. Konjugált osztályok, p-csoport. Feloldhatóság, a véges egyszerű csoportok osztályozása. Direkt szorzat, véges Abel-csoportok. Izomorfizmus, Cayley-tétel, a kis elemszámú csoportok szerkezete, prím- és prímnégyzet rendű csoportok.

Gyűrűk. Homomorfizmus, ideál, faktor. Algebrák. Hányadostest. Karakterisztika.

Testbővítések és alkalmazásaik. Algebrai és transzcendens számok. Algebrai szám minimálpolinomja és foka. Testbővítés szerkezete, létezése, foka. Geometriai szerkeszthetőség. Egyenletek megoldhatósága gyökjelekkel, Cardano-képlet. Véges testek.