1. Önadjungált és szimmetrikus transzformációk

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)
Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A *önadjungált*, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)
Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha *normális*, és minden (komplex feletti) sajátértéke *valós*.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_\mathbf{b}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. □

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)
Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A *szimmetrikus*, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis *szimmetrikus mátrix*.

F8.6.2. Főtengelytétel
Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) *ortonormált bázisban*, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása
Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_\mathbf{b}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció. A megfordítást a 9. előadáson bizonyítjuk.

2. Kvadratikus alakok valós fölött

Másodfokú polinom értékkészlete
Legyen $Q_1(x,y) = x^2+xy+y^2$, $Q_2(x,y) = x^2+2xy+y^2$, $Q_3(x,y) = x^2+3xy+y^2$. Mi ezeknek az *értékkészlete?*

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: *pozitív definit.*
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: *pozitív szemidefinit.*
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: *indefinit.* Hiszen $x+y = a$ és $x-y = b$ megoldható minden a, b-re (mert az együtthatóvektorok $(1,1)$ és $(1,-1)$ bázist alkotnak), így $Q(x,y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$, ami minden valós értéket felvesz.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással
$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x,y).$$

Azaz $Q_1(x,y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v\rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x,y) = \langle u, M_1 v\rangle$.
Fontos: M_1 *szimmetrikus* mátrix.
Láttuk: $Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}$.
M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.
M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
Ezek komponensei adják x és y együtthatóit a négyzetösszegben.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható *szimmetrikus* mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás *mátrixszorzással*: $Q = v^T M v$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így

$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban *összevonva* r_{ij}, akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak *egyértelműen* felírható $\langle v, Mv \rangle = v^T M v$ alakban, ahol M *szimmetrikus* mátrix.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^2$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB.
Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 M b_1 + y_2 M b_2 \rangle =$
$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle = b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2$. Azaz

$Q(x_1, x_2) = \lambda_1 \big(b_{11} x_1 + b_{21} x_2\big)^2 + \lambda_2 \big(b_{12} x_1 + b_{22} x_2\big)^2$

HF: Ugyanezt a számolást végezzük el $n \times n$-es mátrixra.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok

$b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

a $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$-1\Big(\dfrac{-x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 0\Big(\dfrac{-y+z}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 2\Big(\dfrac{2x+y+z}{\sqrt{6}}\Big)^2$.

<u>Ellenőrzés:</u> A műveletek elvégzésével azonosságot kapunk.

3. Kvadratikus karakter

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

<u>(1)</u> Q *pozitív definit*, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

<u>(2)</u> Q *negatív definit*, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

<u>(3)</u> Q *pozitív szemidefinit*, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

<u>(4)</u> Q *negatív szemidefinit*, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékre nempozitív, és van közte 0.)

<u>(5)</u> Q *indefinit*, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrixnak van pozitív és van negatív sajátértéke is.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)
Legyen Q (valós feletti) kvadratikus alak és M a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven *minor*) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor *pozitív definit*, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor *negatív definit*, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ *ha k páros* és $d_k < 0$ *ha k páratlan.*

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).
Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$ és $\det(M_1) = 3/4 > 0$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).
Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe *ellipszis.*
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe *hiperbola.* Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ.
Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.
Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.
Az λ és μ akkor ellentétes előjelű, ha $\det(M) = \lambda\mu < 0$.

4. Kvadratikus alakok komplex fölött

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)
Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1,x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen
$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv\rangle = v^*Mv$,
(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).
Nyilván $Q(x_1,x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,|x_2|^2$.
Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,
$i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).
A fenti M mátrix *önadjungált*, azaz $M^* = M$.

Tétel (F7.4. szakasz, HF)
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ értékkészlete valós $\Longleftrightarrow$ M önadjungált.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $M \in \mathbb{C}^n$ önadjungált mátrix és $Q(v) = v^*Mv = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

(3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánsa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl! Általános komplex kvadratikus alak karakteréről nem beszélhetünk.

5. Bilineáris függvények

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,
továbbá $B(v,w) = \langle v, Mw\rangle = v^T M w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$.
Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u+v,w) = B(u,w) + B(v,w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v,w)$.

(3) $B(w, u+v) = B(w,u) + B(w,v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w,v)$.

(5) Ha M *szimmetrikus* mátrix, akkor $B(v,w) = B(w,v)$
(azaz B *szimmetrikus*).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása (ott M az egységmátrix).

Valós bilineáris függvény

Definíció (F7.1.1. Definíció)
Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett,
$\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény *bilineáris*,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B *szimmetrikus*, ha $B(v,w) = B(w,v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v,v)$ a B-hez tartozó *kvadratikus alak* ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)
Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ minden i, j-re.

Bilineáris függvény mátrixa

Definíció (F7.1.3. Definíció)
Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény *mátrixa* ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big((B(b_i, b_j))\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)
B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza. Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan *egy* lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény
Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB, B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$, és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$. Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$. Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor *szimmetrikus*, ha M szimmetrikus, akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás
Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$. □

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)
A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis *minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.*

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)
Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B *Hermite-féle*:
minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa *önadjungált*, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.

B-ortogonalitás

Definíció (F7.2.4. Definíció)
Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-*ortogonálisak*, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-*ortogonális*, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-*ortogonális*, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis. Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.
B-ortogonális ONB keresése: *sajátértékek* segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált). Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális. Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás
Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,
és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. □

E bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad,
mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,
de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,
vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.
Így a főátló elemeinek *nagysága* megváltozhat (de az előjele nem).
HF (F7.2.5. Tétel): elérhető, hogy a főátlóban csak 0, 1, -1 álljon.

6. Összefoglaló

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Önadjungált és szimmetrikus transzformáció.
Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás.

Tételek
Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról. B-ortogonális bázis, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak. Sylvester tehetetlenségi tétele.