

1. Az euklideszi terek geometriája

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az \mathbb{R}^n vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok *skaláris szorzata*

$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \dots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.
 $\langle v, w \rangle = v^T u$, azaz *mátrixszorzással* is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és b_1, \dots, b_n bázis V -ben.

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n$$

a b_1, \dots, b_n bázishoz tartozó *skaláris szorzat*.

A fenti \mathbb{R}^n -ben a *szokásos bázishoz tartozó skaláris szorzat*.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér \mathbb{R} fölött. A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény *skaláris szorzat*, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (*szimmetrikus*).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (*pozitív definit*).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: *az első változóban lineáris* (vagyis $A(v) = \langle v, w \rangle$ lineáris leképezés minden rögzített w -re).

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. \square

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.

A továbbiakban V euklideszi tér \mathbb{R} fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció

A v normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. A v és w távolsága $\|v - w\|$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér \mathbb{R} fölött, és $v, w \in V$. A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.
 v merőleges (ortogonális) w -re, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő. (Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ jön ki.)

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$. Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$ -re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:

$$ax^2 + bx + c = a(x + (b/2a))^2 - (b^2 - 4ac)/4a. \quad \square$$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \langle xv + w, xv + w \rangle = x^2 \langle v, v \rangle + 2x \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Ez x -ben másodfokú polinom, melynek a főegyütthatója pozitív.

Így $(2\langle v, w \rangle)^2 \leq 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$. Négyzetgyökvonással kész.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w \rangle)^2 = 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke. Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. \square

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.

$$\langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \langle v + w, v + w \rangle = \|v + w\|^2$$
$$\langle v, v \rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.

Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w \rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.

Azaz $w = -\lambda v$, és $0 \leq \langle v, w \rangle = \langle v, -\lambda v \rangle = -\lambda \langle v, v \rangle$,

ami azzal ekvivalens, hogy $-\lambda \geq 0$. □

2. Ortogonalitás

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.

Ortogonalis vektorrendszer: bármely két eleme ortogonalis.

Ortonormált vektorrendszer: ortogonalis, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy b_1, \dots, b_n ortonormált bázis.

Ekkor minden v -re $v = \langle b_1, v \rangle b_1 + \dots + \langle b_n, v \rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle b_j, b_k \rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$ -re $\langle b_j, b_k \rangle = 0$, és $\langle b_j, b_j \rangle = \|b_j\|^2 = 1$. □

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonalis rendszer független.

Bizonyítás

Legyen v_1, \dots, v_m ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. A v_j -vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$, hiszen $k \neq j$ -re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt. Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. □

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció)

Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá. Speciálisan minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy b_1, \dots, b_m ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a b_1, \dots, b_m által generált altérben.

Legyen $w = v - \langle b_1, v \rangle b_1 - \dots - \langle b_m, v \rangle b_m$,
akkor w ortogonális b_1, \dots, b_m mindegyikére (HF).

Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor b_1, \dots, b_{m+1} ortonormált.

Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ altértől.

Állítás

Ha b_1, \dots, b_k ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz,
mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg
bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w \rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k \rangle = \sum_j \lambda_j \mu_j$. □

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla.
(Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.) Egészítsük ki a
 $b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$ ortonormált
rendszert W egy ortonormált bázisává, majd ezt az \mathbb{R}^4 egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v \rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v \rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor

$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

Ennek hossza $\sqrt{4 \cdot (1/4)^2} = 1/2$, ezért $b_4 = w/(1/2) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

3. Transzformáció adjungáltja

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér \mathbb{C} fölött és b_1, \dots, b_n bázis V -ben.

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$,

akkor $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1} \mu_1 + \dots + \overline{\lambda_n} \mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.

$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^* [w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.

A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,

ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$(1) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

$$(2) \quad \langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle.$$

$$(3) \quad \langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle.$$

$$(4) \quad \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle.$$

$$(5) \quad \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \text{ (Hermite-féle)}.$$

$$(6) \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ és } \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 \text{ (pozitív definit)}.$$

Szöveget nem definiálunk. A többi eddigi működik \mathbb{C} fölött is.

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.

Ekkor a $v \in V$ vektor i -edik koordinátája a b_1, \dots, b_n bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá

$[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$ (vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i -vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v \rangle$, mert a skaláris szorzat a második tényezőben lineáris.

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,

akkor $A(b_j) = \lambda_{1j} b_1 + \dots + \lambda_{nj} b_n$. □

Komplex fölött fontos a tényezők sorrendje a skaláris szorzatban!

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.

Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$

\mathbb{R} fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;

\mathbb{C} fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skálár konjugáltja önmaga, ezért a \mathbb{C} fölötti definíció jó \mathbb{R} fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosán akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B jele A^* . Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Az adjungált jellemzésének bizonyítása**Bizonyítás**

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$. Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben. Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor

$$\begin{aligned} \langle B(v), w \rangle &= [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] = \\ &= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w) \rangle. \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje b_1, \dots, b_n az ONB-t.

Ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden v, w -re, akkor $\langle B(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, A(b_j) \rangle$ minden i, j -re. Mivel $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i) \rangle} = \langle b_i, A(b_j) \rangle$.

Tudjuk, hogy $[A] = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$ és $[B] = ((\langle b_i, B(b_j) \rangle))$.

Transzponáláskor az indexek megcserélődnek, ezért $[B]^* = [A]$. □

4. Egybevágósági transzformációk

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban *Jordan-alakú*. Ez *speciális* felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas *ortonormált* bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosán akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Tétel (F8.5.2. Tétel)

Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosán akkor diagonalizálható *ortonormált* bázisban, ha $AA^* = A^*A$ (*normális* transzformáció).

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A skalárszorzzattartó, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A normatartó, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valósban *ortogonális*, komplexben *unitér*.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \text{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \text{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\text{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \text{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$, tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$, és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$ azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.

A felcserélhető az inverzével, így $A^* = A^{-1} \implies A$ normális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy *komplex* fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1. Mi a legszebb alakja *valós* fölött?

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 .

Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$. Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, és ebben a kételemű bázisban A mátrixa a fenti forgatás.

5. Összefoglaló

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat \mathbb{R} és \mathbb{C} fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás. Ortogonalis, ortonormált vektorrendszer és bázis. Adjungált; normális, unitér, ortogonalis transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség. Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban. Ortogonalis rendszer független. Gram-Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonalis rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben \mathbb{C} fölött. Komplex feletti transzformáció alkalmas ONB-ben háromszögmátrix. Az egybevágósági transzformációk jellemzése. Ortogonalis transzformáció blokkfelbontása.