1. A diagonalizálhatóság feltétele

Diagonalizálható transzformációk
Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)
Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és *minden gyöke egyszeres.*

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)
Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan *ortonormált* bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa *szimmetrikus*, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából *mindegy*, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az. A főtengelytételt a 9. előadáson bizonyítjuk.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás
Transzformáció minimálpolinomja megegyezik a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik. Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk). Az ebben szereplő direkt összegről a 9. előadáson lesz szó.

2. A Jordan-féle normálalak

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa
$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:
$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis, M *nem diagonalizálható.*

Szebb alak

A példa folytatása
$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Ez nem diagonális, de *tudjuk hatványozni!*

<u>HF</u> (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:
$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$

Jordan-blokk

Definíció
Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó *Jordan-blokk*:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből
N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0. Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak

Definíció
Az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix *Jordan-alakú*, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)
Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott *Jordan-féle normálalak* azonban *egyértelmű*: csak a blokkok *sorrendje* változhat. Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban *hány darab* $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon. Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma. A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist. *Haszna:* van képlet a Jordan-alak hatványozására (később).

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel
Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője a *legnagyobb* λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete.

Például

$$M=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

minimálpolinomja $m_M(x)=(x-2)(x-3)(x-1)^3x^2$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad\text{és}\qquad N=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$. Mivel $M^2=0$ de $N^2\neq 0$, ezért $m_M(x)=x^2$ és $m_N(x)=x^3$. Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek. Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el. Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van. Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M:\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\text{ vagy }\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad\text{illetve}\quad N:\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Az első két mátrix hasonló, csak a blokkok sorrendjében különbözik.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix}D_1&0&\dots&0\\0&D_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&D_n\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}D_1^k&0&\dots&0\\0&D_2^k&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&D_n^k\end{bmatrix}.$$

Itt $D_1,\dots,D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&i\end{bmatrix}^{98}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\text{ (A felső blokk 90°-os forgatás!)}$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás
$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás
$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE *felcserélhető*, mert $N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a *binomiális tétel*:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$. Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. □

3. Leképezés és mátrix rangja

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *rangja* a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció
Az M mátrix *oszloprangja* az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M *sorrangja* a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel
Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a *mátrix rangja*, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)
Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma
Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás
A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.
A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$.
Vagyis w komponenseinek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja tényleg nulla. □

Sorrang és oszloprang: Következmény
Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény
Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás
Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben,
és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor N oszloprangja m, és N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor L sorai összefüggenek, mert T^m-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg. De akkor N sorai is összefüggenének a Lemma miatt, ellentmondás. □

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang
Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. □

$r(A) = r([A])$ bizonyítása
Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \operatorname{Im} A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus, így megőrzi a rangot (HF). □

Gauss-elimináció és rang

Állítás
A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás
Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;
- az egyik vektort nem nulla skalárral szorozzuk.

Ha ezt a sorokkal végezzük, akkor a sorrang nem változik, ha az oszlopokkal, akkor az oszloprang nem változik. □

Házi Feladat: A Gauss-elimináció végeztével a vezéregyesek száma megegyezik a mátrix sorrangjával.

Determinánsrang

Definíció
Az M mátrix *determinánsragja* r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

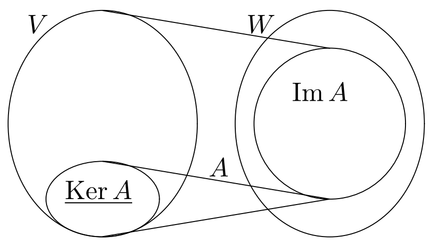
Tétel (F3.4.2. Tétel)
Minden mátrix determinánsragja egyenlő a rangjával.

Bizonyítási ötlet: Megmutatható, hogy Gauss-eliminációs lépések során a determinánsrang sem változik (lásd F3.4.2. Tétel).
Mivel $\det(N) = \det(N^T)$ minden négyzetes mátrixra, ezen az úton új bizonyítást kaphatunk a sorrang és az oszloprang egyenlőségére.

4. Rangra vonatkozó egyenlőtlenségek

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V \implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

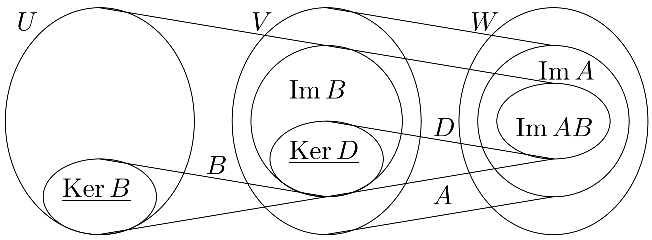
$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W \implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

Állítás
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata
$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\,A + \mathrm{Im}\,B$.
$\dim(\mathrm{Im}\,A + \mathrm{Im}\,B) \le \dim \mathrm{Im}\,A + \dim \mathrm{Im}\,B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. □

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)
$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás
Mivel $\mathrm{Im}\,AB \subseteq \mathrm{Im}\,A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\,AB \le \dim \mathrm{Im}\,A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\,B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\,D + \dim \mathrm{Ker}\,D = \dim \mathrm{Im}\,B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\,D \le \dim \mathrm{Im}\,B = r(B)$. □

5. Lineáris egyenletrendszer és rang

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$ a *kibővített* mátrix.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)
Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat
Akkor és csak akkor *van* megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják. Akkor és csak akkor *egyértelmű* a megoldás, ha M oszlopai lineárisan függetlenek is.

6. Összefoglaló

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek
Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége. A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról. Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása. Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A sorrang és az oszloprang egyenlősége. A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.