

1. Diagonalizálás

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N *hasonló*, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban. Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra.

$A \in \text{Hom}(V)$ *diagonalizálható*, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális. A diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

Definíció

Az M mátrix *diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Ekvivalens: M egy diagonalizálható transzformáció mátrixa.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$SMS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M *diagonalizáltja* (főátlóban sajátértékek).

Vagyis M -et bázistranszformációval diagonális alakra hoztuk.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$ -es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix *diagonalizálható*.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x - 2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).

Az M viszont *nem diagonalizálható*. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

Az $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok között nincs két független (azaz bázis).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok *lineárisan függetlenek*.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).

Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$. Az A -t alkalmazva

$$0 = \mu_1 A(v_1) + \dots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_k \lambda_k v_k.$$

Az előző egyenlet λ_1 -szeresét kivonva

$$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0.$$

Az indukciós feltevés miatt v_2, \dots, v_n független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.

Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \dots = \mu_k = 0$.

Mivel $v_1 \neq 0$ (hiszen sajátvektor), a fenti egyenletből $\mu_1 = 0$. □

2. Véges Markov-folyamatok

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n -edik évben a_n -ed rész autós, b_n -ed rész tömegközlekedő.

Ekkor $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,1b_n$, és $b_{n+1} = 0,05a_n + 0,9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0,4$ és $b_0 = 0,6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$. Vagyis a feladat az M mátrix hatványának a kiszámítása. Ehhez *diagonalizáljuk* az M mátrixot.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1,85x + 0,85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De *diagonális mátrixot könnyű hatványozni*: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 0,85^n & 2 - 2 \cdot 0,85^n \\ 1 - 0,85^n & 1 + 2 \cdot 0,85^n \end{bmatrix}.$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}, \quad \text{így } v_n = M^n v_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 - 0,8 \cdot 0,85^n \\ 1 + 0,8 \cdot 0,85^n \end{bmatrix}.$$

Az eredmény elemzése

Az n -edik évben $a_n = 66,6 - 26,7 \cdot 0,85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33,3 + 26,7 \cdot 0,85^n$ százalék tömegközlekedik.

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $0,85^n \rightarrow 0$ (mert $|0,85| < 1$), vagyis
hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.

HF: Ez *nem függ a kiinduló eloszlástól* (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredeti föltevések fiktívek!

3. Behelyettesítés polinomba

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \in T[x]$.

Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen

$$f(M) = a_0E + a_1M + \dots + a_mM^m \in T^{n \times n}.$$

Ha V vektortér T fölött, $A \in \text{Hom}(V)$ és $I \in \text{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen

$$f(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_mA^m \in \text{Hom}(V).$$

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2, N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.

($[A] = N$ tetszőleges bázisban.)

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ekkor } f(M) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diagonális mátrix behelyettesítése (HF)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies f(D) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f + g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.

$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
 $= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.

Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz

$aM^2vM + bMuM^2 = (av + bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?

Az asszociativitás miatt! **HF**: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$

(itt $M^0 = E$). Vagyis M hatványai felcserélhetők.

4. A minimálpolinom

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) *gyöke* f -nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. *Másnak nem!*

Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g -t maradékosan $x - 2$ -vel:

$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen

$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$. Azaz $c = 0$, tehát $x - 2 \mid g$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz

egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy,

hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix *minimálpolinomja*. Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is. Ekkor a minimálpolinom jele m_A .

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $x - 2$.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a *legalacsonyabb fokú* olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1 , $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis *elsőfokú* minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettős mátrix nem cE alakú, akkor minimálpolinomja ugyanaz, mint a karakterisztikus polinomja.

Diagonális mátrix minimálpolinomja**Állítás**

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de *mindegyik csak egyszer felsorolva*. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ minimálpolinomja } m(x) = (x - 1)(x - 2).$$

$m(D) = 0$ (HF), de $(x - 1)(x - 2) \mid m_D(x)$, mert $1, 2$ sajátérték.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ minimálpolinomja } (x - 2)^2 \text{ (van kétszeres gyöke!).}$$

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$. A két minimálpolinom ennek normált osztója: $1, x, x^2$ vagy x^3 . Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke. Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható. Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2 , hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix. Mivel $N^2 \neq 0$, ezért N minimálpolinomja x^3 . Azt nem kell ellenőrizni, hogy x^3 -nek gyöke N , mert ez következik a Cayley–Hamilton-tételből.

5. Bizonyítások

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \dots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan a_0, \dots, a_{n^2} , nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \dots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\text{gr}(r) < \text{gr}(m)$ vagy $r = 0$.

Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$.

Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek M gyöke. Ezért $r(M) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. \square

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.

$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.

És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.

Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, akkor

$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \dots + a_m M^m v =$

$= a_0 v + a_1 \lambda v + \dots + a_m \lambda^m v = f(\lambda)v$.

Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$, ezért $f(\lambda) = 0$. \square

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak. Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték. A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$. Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$. Mivel k_M gyökei az M sajátértékei, ezért m_M minden gyöke sajátértéke M -nek. Mivel $n = \text{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\text{gr}(m_M) \leq n$. \square

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk. A bizonyításához újabb eszközök kellenek. Lásd Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.7.6. Tétel.

6. Összefoglaló

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom (a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke).

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek. $M \in T^{n \times n}$ -nek n különböző sajátértéke van $\implies M$ diagonalizálható. A minimálpolinom létezik, és $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$. Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$. A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A minimálpolinom akkor elsőfokú, ha a transzformáció nyújtás. Diagonális mátrix minimálpolinomja (és sajátértékei).