1. Bázistranszformáció

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)
Legyenek $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \dots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot,
amelynek oszlopaiban a $\mathbf{d}$ vektorainak koordinátái állnak a $\mathbf{b}$ bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d/d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b/b}}S$.

Bizonyítás
Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés,
melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b/b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b/b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d/b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b/d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d/b}}[C]_{\mathbf{b/b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$. □

HF: $[B]_{\mathbf{d/d}} = S$ és $[C]_{\mathbf{d/d}} = S^{-1}$.

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)
Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így
$[A]_{\mathbf{d/d}} = [B]_{\mathbf{d/b}}[C]_{\mathbf{b/b}}[A]_{\mathbf{b/b}}[B]_{\mathbf{b/b}}[C]_{\mathbf{b/d}} =$
$= ES^{-1}[A]_{\mathbf{b/b}}SE = S^{-1}[A]_{\mathbf{b/b}}S$. □

Definíció
Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N *hasonló*, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

Bizonyítás: HF (bázistranszformáció).

2. Képtér és magtér

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Az A *magtere* $\mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \ : \ A(v) = 0_W\}$.

$\mathrm{Ker}(A)$ altér V-ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás
$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \mathrm{Ker}(A)$. Legyen $u, v \in \mathrm{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$.
Ezért $A(u+v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \mathrm{Ker}(A)$.
$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \mathrm{Ker}(A)$. *Tehát* $\mathrm{Ker}(A)$ *altér.*
Ha $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$*, akkor* A *injektív*, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor
$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.
Ha A *injektív, akkor* $\mathrm{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \mathrm{Ker}(A)$, akkor $A(v) = 0 = A(0)$,
így az injektivitás miatt $v = 0$. □

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Az A *képtere* $\mathrm{Im}(A) = \{A(v) \in W \ : \ v \in V\}$.
Azaz $\mathrm{Im}(A)$ az A *értékkészlete*, azon $w \in W$ vektorokból áll,
melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\mathrm{Im}(A)$ altér W-ben, és pontosan akkor W, ha A szürjektív.

Bizonyítás
$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \mathrm{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \mathrm{Im}(A)$, ekkor
$A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$-re. Ezért
$A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \mathrm{Im}(A)$.
$A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \mathrm{Im}(A)$. *Tehát* $\mathrm{Im}(A)$ *altér.*
Szürjektív akkor és csak akkor, ha értékkészlete az egész W. □

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)
$A : V \to W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis $\mathrm{Ker}(A)$-ban. Egészítsük ezt ki a $d_1, \ldots, d_m$ vektorokkal
V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \ldots, A(d_m)$
bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban.
Generátorrendszer: Ha $w \in \mathrm{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$-re.
Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \ldots + \mu_m d_m$.
Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \ldots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.
Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \ldots + \mu_m A(d_m) = 0$.
Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \ldots + \mu_m d_m \in \mathrm{Ker}(A)$, és így felírható $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$
alakban is. Bázisban v felírása *egyértelmű*, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. □

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)
Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \mathrm{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás
Dimenziótétel: $\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim V$. Ha A szürjektív, akkor $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$. Ezért $\mathrm{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is. Ha A injektív, akkor $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim(V)$. Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. $\square$

Végtelen dimenzióban *nem igaz!* Példa:
$\mathbb{R}[x]$-ben $A\big(f(x)\big) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.
$\mathbb{R}[x]$-ben $A\big(f(x)\big) = f'(x)$ (derivált). Szürjektív, de nem injektív.

3. Az invertálhatóság jellemzései

Leképezés determinánsa

Definíció
Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A *determinánsa* $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, *de melyik bázisban? MINDEGY!*

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det\big(S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S\big) = \det\big([A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}\big)$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: *hányszorosára növeli A a térfogatot.*
Pontos tárgyalás *előjeles mértékek* segítségével: lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.
$\det(A)$ pozitív, ha A *irányítástartó*, negatív, ha A *irányításváltó.*

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)
Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \mathrm{Hom}(V)$, akkor *ekvivalens*:

(1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami *lineáris*).

(2) A-nak van balinverze ($\exists X \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).

(3) A-nak van jobbinverze. ($\exists X \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).

(4) A nem *bal oldali nullosztó* (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).

(5) A nem *jobb oldali nullosztó* (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).

(6) A injektív (azaz $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$).

(7) A szürjektív (azaz $\mathrm{Im}(A) = V$).

(8) A bijektív.

(9) $\det(A) \neq 0$.

Itt C és D is $\mathrm{Hom}(V)$-ben van.

Az invertálhatóság jellemzései: megjegyzések

(1) $\implies$ (2),(3) triviális, (6),(7) $\implies$ (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) $\iff$ (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) $\iff$ (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez *ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes.* Ezért (2) $\implies$ (4). Hasonlóan (3) $\implies$ (5) (HF).

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy (4) $\implies$ (6) és (5) $\implies$ (7), mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás ((4) $\implies$ (6))
Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \mathrm{Hom}(V)$ nem injektív,
akkor létezik $0 \neq C \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás
A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A)$. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j-re. Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j-re, mert $v \in \mathrm{Ker}(A)$. Azaz AC egy bázis minden elemét nullába viszi, így minden vektort nullába visz, tehát $AC = 0$. $\square$

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás ((5) $\implies$ (7))
Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \mathrm{Hom}(V)$ nem szürjektív,
akkor létezik $0 \neq D \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás
A nem szürjektív, így $\mathrm{Im}(A)$ nem az egész V. Legyen $b_1, \ldots, b_m$ bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban, és egészítsük ezt ki a $d_1, \ldots, d_k$ vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i-re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j-re. Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \mathrm{Im}(A)$-ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$ alakban,
és $D(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \ldots + \lambda_m D(b_m) = 0$. Így $DA(w) = 0$ minden $w \in V$-re, mert $v = A(w) \in \mathrm{Im}(A)$. □

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)
A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra *ekvivalens*:

(1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).

(2) M-nak van balinverze.

(3) M-nak van jobbinverze.

(4) M nem *bal oldali nullosztó* (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).

(5) M nem *jobb oldali nullosztó* (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).

(9) $\det(M) \neq 0$.

Itt C és D is $T^{n \times n}$-beli mátrix.

Bizonyítás
A mátrixok és a lineáris transzformációk közötti *kölcsönösen egyértelmű, műveletartó* megfeleltetésből következik.

Bal- és jobbinverz

Tétel
Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás
A feltétel szerint A-nak van jobbinverze (a B), ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$. Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$. Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés
Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$. Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk. A mostani *számolásmentes* bizonyítás mélyén a *dimenziótétel* van. *Ez az absztrakt módszerek erejét demonstrálja.*

4. Sajátérték és sajátvektor

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció
$A \in \mathrm{Hom}(V)$ *diagonalizálható,* ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)
V vektortér, $A \in \mathrm{Hom}\, V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n\times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor
λ *sajátértéke*, v pedig egy λ-hoz tartozó *sajátvektora* A-nak.
A λ sajátértékhez tartozó *sajátaltér* $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis
a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. HF: ez altér.

Nyilván $Av = \lambda v \iff [A][v] = \lambda[v]$. Ezért A sajátértékei ugyanazok, mint a mátrixának a sajátértékei.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)
$A \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis.

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ *sajátérték* $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa
Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában
$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix}.$
Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$, ezek A sajátértékei.

A karakterisztikus polinom

Definíció
$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A *karakterisztikus polinomja.*

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)
$M \in T^{n\times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$.

(1) A k_M tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.

(3) A *sajátértékek összege*, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ az M mátrix *nyoma*,
vagyis az M főátlójában álló elemek összege.
Ez a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(4) A *sajátértékek szorzata* $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(M)$.
Ez a k_M polinom konstans tagja.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α *szögű forgatás.*
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \big(\cos(\alpha) - x\big)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$
Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz *komplex* sajátértékek! Az A mátrixának *nyoma* $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{bmatrix} =$
$= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Tehát 2 az egyetlen sajátérték. Ez *kétszeres* gyöke k_M-nek! Nyom $= 2 + 2$, determináns $= 2 \cdot 2$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a *tükrözés az $y = x$ egyenesre.* Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1-hez tartozó sajátvektorok $r\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $(r \neq 0)$.

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Ebben $[A] = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$.

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk
Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz,
mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény
Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja,
és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás
Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ bázisok, hogy $[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = M$ és $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = N$. Ezért $k_M(x) = k_A(x) = k_N(x)$. $\square$

HF az állítást a bázistranszformáció képletéből levezetni.

5. Összefoglaló

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánsa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek
A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzései mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban. A sajátértékek a kar. pol. gyökei. A mátrix nyomának és determinánsának kapcsolata a sajátértékekkel és a kar. pol. együtthatóival. Hasonló mátrixok kar. polinomja egyenlő.