1. Lineáris leképezések

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (F5.1.1. Definíció)
Legyenek V és W vektorterek *UGYANAZON* T test fölött.
Az $A : V \to W$ *lineáris leképezés*, ha
összegtartó, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$;
skalárszorostartó, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén $A(\lambda v) = \lambda A(v)$.
Az $A : V \to W$ lineáris leképezések halmaza $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Állítás (F5.1.2. Tétel)
Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,
azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra
$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V)$, adjunk hozzá $-A(0_V)$-t. □

Példák lineáris leképezésre

(1) A sík és a tér origót fixáló *egybevágósági* és *hasonlósági* transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).

(2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.

(3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).

(4) $V = \mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ fölött, $W = \mathbb{R}$ önmaga fölött.
$A(p) = p(3)$ (az 3 szám behelyettesítése).

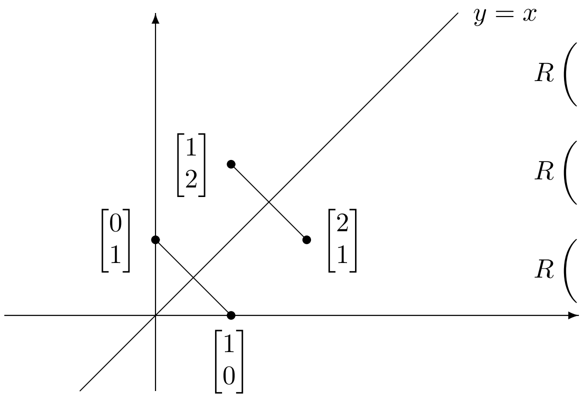
(5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
$B = (b_1, \ldots, b_n)$ rögzített bázis V-ben és $A(v) = [v]_B$.

(6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$ minden $v \in V$-re.
Ez a *nulla leképezés*, jele 0.

(7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az *identikus leképezés*, jele I vagy I_V.

Tükrözés egyenesre

Példa
Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés.



$$R\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

A tükrözés képlete

Kérdés
Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés. $R\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = ?$

<u>Láttuk:</u> $R\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ és $R\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Ezért

$$R\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\right) + R\left(\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\right),$$

hiszen R *összegtartó*. A *skalárszoros-tartás* miatt ez

$$R\left(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + R\left(y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = xR\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + yR\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= x\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}.$$

Vektor képe általános transzformációnál

Kérdés
Legyen $A : T^2 \to T^2$ *lineáris transzformáció.*
Ha $A\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ és $A\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$, akkor $A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = ?$

$A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\right),$
hiszen A *összegtartó.* A *skalárszoros-tartás* miatt ez
$A\left(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + A\left(y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = xA\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + yA\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$
$= x\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax\\bx\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}cy\\dy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{bmatrix}.$
Tehát *minden vektor képét ki tudjuk számolni,* ha ismerjük a, b, c, d értékét.

Lineáris transzformáció mátrixa

Láttuk
Legyen $A : T^2 \to T^2$ *lineáris transzformáció.* Ha
$A\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ és $A\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$, akkor $A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{bmatrix}.$

Definíció
A fenti A *mátrixa* $[A] = \begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}$. (Az oszlopok $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:
$\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{bmatrix}$ (így lehet kiszámolni egy vektor képét).
Azaz $A(v) = [A]v$.

A forgatás mátrixa

Példa
Az origó körüli α szögű forgatás mátrixa $[F] = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: <u>HF</u>.
Komplex számokkal: ez a forgatás szorzás $\cos\alpha + i\sin\alpha$-val.
Az $x + iy$ számnak az $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ felel meg: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \leftrightarrow 1$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \leftrightarrow i$.
A $[F]$ *első* oszlopa: $1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}.$
A *második*: $i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -\sin\alpha + i\cos\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}.$

Mátrix bázispárban

Definíció (F5.7.1. Definíció)
$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A *mátrixa* a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban
$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\Big] \in T^{m \times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

$A(b_1) = \lambda_{11} d_1 + \ldots + \lambda_{m1} d_m, \ \ldots, \ A(b_n) = \lambda_{1n} d_1 + \ldots + \lambda_{mn} d_m$.

Az előbbi példákban a sík szokásos bázisa szerepelt.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (F5.7.3. Tétel)
Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$.
Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} [v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik" a $\mathbf{b}$).

Bizonyítás
Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} [v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

<u>Tudjuk:</u> $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$,
és $\overline{A(b_j)} = \lambda_{1j} d_1 + \ldots + \lambda_{mj} d_m$. Behelyettesítve
$A(v) = (\lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n) d_1 + \ldots + (\lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n) d_m$. $\square$

2. Lineáris leképezések szorzata

Példa kompozícióra

Kérdés
Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az $y = x$ egyenesre, majd forgatunk az origó körül 90°-kal? Ez a két transzformáció *kompozíciója* (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ezért $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ képe

$$F\left(\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

Az eredmény az y-tengelyre való tükrözés (HF).

A kompozíció mátrixa

Definíció
Ha $A, B : T^2 \to T^2$ transzformációk, akkor *kompozíciójuk* $(A \circ B)(v) = A\big(B(v)\big)$ tetszőleges $v \in T^2$ esetén.
Összetett függvény: először B-t, utána A-t alkalmazzuk.

Tétel
Ha $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, és $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Tehát $[A \circ B] = [A][B]$: *kompozíció mátrixa a mátrixok szorzata.*

A mátrixok szorzását azért definiáltuk ezekkel a képletekkel, hogy ez az összefüggés igaz legyen.

A kompozíció mátrixának kiszámítása

Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$$A\left(B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A\left(B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ második oszlopa is megfelelő. $\square$

Példa: $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kompozíció az általános esetben

Definíció (F5.6.1. Definíció)
Legyenek U, V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \to W$ és a $B : U \to V$ lineáris leképezések *szorzata* (kompozíciója) $(AB)(u) = A\big(B(u)\big)$ minden $u \in U$-ra.

Tétel (F5.6.2. Tétel)
Ha A és B lineáris, akkor AB is az.

Bizonyítás
AB skalárszoros-tartó:
$AB(\lambda u) = A\big(B(\lambda u)\big) = A\big(\lambda B(u)\big) = \lambda A\big(B(u)\big) = \lambda AB(u)$. □

A kompozíció definíciója miatt.
B skalárszoros-tartása miatt.
A skalárszoros-tartása miatt.
A kompozíció definíciója miatt.
HF: AB összegtartó.

Általános kompozíció mátrixa

Tétel (F5.7.6. Tétel)
Legyen $\mathbf{a}$ bázis U-ban, $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben,
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a $\mathbf{b}$).

Következmény
Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás
$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$, ami az egységmátrix.
Hasonlóan $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$ is az egységmátrix. □

3. Leképezések összege és skalárszorosa

Pontonkénti műveletek

Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)
Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött,
$A, B : V \to W$ lineáris leképezések és $\lambda \in T$.

(1) A és B *összege* $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$-re.

(2) A λ-*szorosa* $(\lambda A)(v) = \lambda\big(A(v)\big)$ minden $v \in V$-re.

Tétel (F5.1.3. Tétel)
$A + B$ és λA is lineáris transzformáció.

Mintabizonyítás: λA összegtartó
$(\lambda A)(u+v) = \lambda\big(A(u+v)\big) = \lambda\big(A(u)+A(v)\big) =$
$= \lambda\big(A(u)\big) + \lambda\big(A(v)\big) = (\lambda A)(u) + (\lambda A)(v)$.

A λA definíciója miatt.
Az A összegtartása miatt.
A skalárral szorzás tulajdonsága (vektortéraxióma) miatt.
A λA definíciója miatt (kétszer alkalmazva).
A másik három állítás HF.

Az összeg mátrixa

Tétel (F5.7.4. Tétel)
Rögzített $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés
összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.
Azaz *összeg mátrixa a mátrixok összege.*

Bizonyítás
$w \mapsto [w]_\mathbf{d}$ összegtartó W és T^m között.

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_\mathbf{d} = [A(b_i) + B(b_i)]_\mathbf{d} = [A(b_i)]_\mathbf{d} + [B(b_i)]_\mathbf{d}$. Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A, illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. □

A skalárszoros mátrixa

Tétel (F5.7.4. Tétel)
Rögzített $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés
skalárszoros-tartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.
Azaz *λ-szoros mátrixa a mátrix λ-szorosa.*

Bizonyítás
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között.

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így $[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda[A(b_i)]_{\mathbf{d}}$. Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából vett megfelelő oszlopok λ-szorosai. A mátrixok λ-szorosának definíciója miatt tehát $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. $\square$

A műveletek tulajdonságai

Jelölés
$\mathrm{Hom}(V, V)$ rövidítve $\mathrm{Hom}(V)$, elemei lineáris *transzformációk.*

Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)
Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az összeadásra és skalárral szorzásra $\mathrm{Hom}(V, W)$ *vektortér.*
Nullelem: a nulla leképezés. Az A ellentettje: $(-A)(v) = -A(v)$.
$\mathrm{Hom}(V)$ egységelemes *gyűrű* az összeadásra és a szorzásra,
és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ $(A, B \in \mathrm{Hom}(V),\ \lambda \in T)$.
Az egységelem az identikus transzformáció.

<u>FONTOS házi feladat</u> önállóan kidolgozni a bizonyítást! Különösen ajánlom a két disztributív azonosság levezetését:
$A(B + C) = AB + AC$ és $(B + C)A = BA + CA$.

4. Izomorf vektorterek

Példák izomorfizmusra

Definíció (F5.2.1. Definíció)
Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *izomorfizmus*, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W *izomorf* vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus. Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa
Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben, akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között. Ezért *minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.*

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben. Ekkor $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ izomorfizmus $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között. Vagyis $\mathrm{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W)\times\dim(V)}$. A művelettartást láttuk, az egyértelműséget most bebizonyítjuk.

Az előírhatósági tétel

Tétel (F5.3.1. Tétel)
Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,
$b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \dots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok.
Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van,
melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \le j \le n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség
Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez $\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$,
mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani, és így *csak egy* megfelelő A leképezés létezhet. Az egyértelműséget tehát beláttuk.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés
Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$. Ez *jóldefiniált*, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A *összegtartó*, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A *skalárszorostartás* bizonyítása hasonló: HF.
Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n$,
ezért $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \ldots + 0 \cdot c_n = c_1$.
Hasonlóan $A(b_j) = c_j$ minden $1 \le j \le n$ esetén. $\square$

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (F5.7.4. Tétel)
Rögzített $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés
izomorfizmus $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme *egyértelműen* írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban. Ha $A \ne B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \dots, A(b_n)$ és $B(b_1), \dots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző. Ha adott egy $M \in T^{m \times n}$ mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy $c_1, \dots, c_m$ vektorrendszert adnak W-ben, és az előírhatósági tételből kapott A leképezésnek M lesz a mátrixa. $\square$

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (F5.2.5. Tétel)
Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyításvázlat
Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő. Legyen $b_1,\ldots,b_n$ bázis V-ben és $d_1,\ldots,d_n$ bázis W-ben. Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus és $b_1,\ldots,b_n$ bázis V-ben, akkor
HF: $A(b_1),\ldots,A(b_n)$ *bázis* W*-ben.* Ezért a két dimenzió megegyezik. □

5. Összefoglaló

A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.
Lineáris leképezések mátrixa, összege, λ-szorosa, szorzata. Izomorfizmus.

Tételek
Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél. Az α szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában. Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével. Az összeg, λ-szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa. $\mathrm{Hom}(V,W)$ vektortér és izomorf $T^{n\times k}$-val. $\mathrm{Hom}(V)$ gyűrű, és a megfeleltetés $T^{n\times n}$-nel szorzattartó. Vektortér-izomorfia jellemzése a dimenzióval. $\mathrm{Hom}(V,W)$ dimenziója. Az előírhatósági tétel.