

# 1. A dimenzió

## A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

### Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \dots, b_n$  pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme *egyértelműen* fölírható a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható  $\iff$  generátorrendszer (nyilván).

*Ha egyértelmű a felírás, akkor független*, mert ha  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ , akkor  $0b_1 + \dots + 0b_n = 0$ , és az egyértelműség miatt  $(\forall j)\lambda_j = 0$ .

*Ha független, akkor egyértelmű a fölírás*, mert ha

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ , akkor innen  $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$ , és a függetlenség miatt  $\lambda_j - \mu_j = 0$ , azaz  $\lambda_j = \mu_j$  minden  $j$ -re (tehát egyértelmű).  $\square$

## A bázis mint koordináta-rendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a  $V$  vektortéren egy *koordináta-rendszert* vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

### Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $B = (b_1, \dots, b_n) \in V$  bázis.

Ha  $v \in V$  és  $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ , ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ , akkor

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n \text{ a } v \text{ koordinátavektora ebben a bázisban.}$$

## A koordinátázás haszna

A keletkező  $T^n$ -beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti  $V$  vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

## Példák koordinátákra

$B = (1, x)$  bázis  $\mathbb{R}[x]$  legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A  $v = 51x - 3$  koordinátavektora  $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$ .

$B' = (1 + x, x)$  bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor  $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$ , mert  $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$ .

$V = \mathbb{C}$  az  $\mathbb{R}$  fölött,  $B = (1, i)$ . Ekkor  $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$ .

Ha  $B' = (1 + i, i)$  másik bázis, akkor  $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$ .

Indoklás:  $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$ .

Persze  $B'$  „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon, hiszen  $1 + i$  nem merőleges  $i$ -re.

### A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

#### Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$  bázis  $\mathbb{C}$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött. Mi lesz  $[4 + i]_B$ ?

$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$ . A valós és képzetes rész:  $x + 2y = 4$  és  $x - y = 1$ , ez

lineáris egyenletrendszer. Megoldás:  $x = 2$  és  $y = 1$ . Azaz  $[4 + i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Valójában azt használtuk, hogy  $1$  és  $i$  bázis.

Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk, akkor hogyan változik egy vektor koordinátavektora? Képlet: később.

### Független $\leq$ generátorrendszer

#### Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  független,  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  generátorrendszer egy  $V$  vektortérben, akkor  $n \leq k$ . Azaz  $|F| \leq |G|$ , szövegesen: *tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.*

#### Bizonyítás

Mivel  $G$  generátorrendszer,  $f_j$  felírható lineáris kombinációként:

$f_j = \lambda_{j1}g_1 + \dots + \lambda_{jk}g_k$  (minden  $1 \leq j \leq n$ -re). Tekintsük a  $\lambda_{1i}x_1 + \dots + \lambda_{ni}x_n = 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) lineáris egyenletrendszert.

Indirekt feltevés:  $n > k$ . Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből). De erre a megoldásra  $x_1f_1 + \dots + x_nf_n = 0$ , ellentmondás, hiszen  $f_1, \dots, f_n$  lineárisan független.  $\square$

### Bázis elemszáma egyértelmű

#### Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy  $V$  vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.

(Ez az elemszám a vektortér *dimenziója*,  $\dim(V)$ ).

Minden független rendszer elemszáma  $\leq \dim(V)$ .

Minden generátorrendszer elemszáma  $\geq \dim(V)$ .

### Bizonyítás

Ha  $B_1$  és  $B_2$  bázis, akkor  $B_1$  független, és  $B_2$  generátorrendszer, ezért  $B_1$  elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint  $B_2$  elemszáma.  $B_1$  és  $B_2$ -t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel  $|B_2| \leq |B_1|$ . Tehát  $B_1$  és  $B_2$  elemszáma egyenlő.

Legyen  $B$  egy rögzített bázis  $V$ -ben. Ekkor  $|B| = \dim(V)$ .

Ha  $F$  független, akkor  $|F| \leq |B|$ , mert  $B$  generátorrendszer.

Ha  $G$  generátorrendszer, akkor  $|G| \geq |B|$ , mert  $B$  független.  $\square$

## 2. Függés és függetlenség

### Lineáris függés

#### Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

$v_1, \dots, v_m \in V$  lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.

$v \in V$  lineárisan függ  $v_1, \dots, v_m$ -től, ha felírható  $v_1, \dots, v_m$  lineáris kombinációjaként. Azaz ha  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .

Nyilván  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor generátorrendszer  $V$ -ben, ha  $V$  minden vektora függ tőle.

#### Állítás (F4.4.3. Tétel)

- (1) Független rendszer része is független. (HF)
- (2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Az üres halmaz lineárisan független! Ezért  $\dim(\{0\}) = 0$ .

#### Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha  $v$  függ  $v_1, \dots, v_m$ -től, akkor  $v_1, \dots, v_m, v$  összefüggő.

Mert  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$ , és ez nemtriviális lineáris kombináció a  $-1$  együttható miatt.

#### 1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha  $v_1, \dots, v_m$  lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől! Például  $0, v$  összefügg, de ha  $v \neq 0$ , akkor  $v$  nem függ  $0$ -tól.

#### Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$ -ra)

$v_1, v_2, v_3$  összefüggő, így van olyan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , melyre  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ , de nem mindegyik  $\lambda_j$  nulla.

Ha például  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor  $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$ .  $\square$

## A függés és függetlenség további kapcsolata

### 2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha  $v_1, \dots, v_m$  független, de  $v_1, \dots, v_m, v$  összefüggő, akkor  $v$  (az, amelyik biztosan) függ  $v_1, \dots, v_m$ -től.

#### Bizonyítás

Mivel  $v_1, \dots, v_m, v$  összefüggő, van olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda$ , hogy nem mindegyik nulla, de  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$ . Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együttthatója nem nulla.

De itt  $\lambda$  biztosan nem nulla, mert ha  $\lambda = 0$  lenne, akkor  $v_1, \dots, v_m$  lineárisan összefüggene (hiszen ekkor  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ , és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll). Ezért  $v$  kifejezhető, azaz függ  $v_1, \dots, v_m$ -től.  $\square$

## 3. A bázis jellemzései

### Maximális és minimális halmazok

#### Definíció

Legyen  $\mathcal{H}$  halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).

Az  $L \in \mathcal{H}$  *legnagyobb* elem, ha  $\mathcal{H}$  minden elemét tartalmazza.

Az  $L \in \mathcal{H}$  *legsűkebb* elem, ha  $\mathcal{H}$  minden elemének része.

Az  $M \in \mathcal{H}$  *maximális* elem, ha nincs  $\mathcal{H}$ -ban  $M$ -et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha  $H \in \mathcal{H}$  és  $H \supseteq M$ , akkor  $H = M$ .

Az  $M \in \mathcal{H}$  *minimális* elem, ha nincs  $\mathcal{H}$ -ban olyan halmaz, ami  $M$ -nek valódi része. Azaz ha  $H \in \mathcal{H}$  és  $H \subseteq M$ , akkor  $H = M$ .

#### Példa

Legyen  $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ .

Legnagyobb elem nincs,  $\{1, 2, 3\}$  és  $\{3, 4\}$  a maximális elemek.

Legsűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Ha egy elem legnagyobb, akkor maximális is, de fordítva nem.

### Bázis = maximális független

#### Állítás (F4.5.3. Feladat)

A  $b_1, \dots, b_n$  akkor és csak akkor *bázis* a  $V$  vektortérben, ha *maximális* független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

#### Bizonyítás

Ha  $b_1, \dots, b_n$  *bázis*, akkor *maximális független*.

Valóban, ha  $v \in V$ , akkor  $v$  függ  $b_1, \dots, b_n$ -től, mert  $b_1, \dots, b_n$  generátorrendszer. Ezért  $b_1, \dots, b_n, v$  összefüggő. Tehát  $b_1, \dots, b_n$  maximális független.

Ha  $b_1, \dots, b_n$  *maximális független*, akkor *generátorrendszer is*.

Valóban, ha  $v \in V$ , akkor  $b_1, \dots, b_n, v$  már összefüggő. De  $b_1, \dots, b_n$  független, így a 2. Lemma miatt  $v$  függ  $b_1, \dots, b_n$ -től. Ezért  $b_1, \dots, b_n$  generátorrendszer is.  $\square$

### Bázis = minimális generátorrendszer

#### Állítás (F4.5.3. Feladat)

A  $b_1, \dots, b_n$  akkor és csak akkor *bázis* a  $V$  vektortérben, ha *minimális* generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

#### Bizonyítás (egyik irány)

Ha  $b_1, \dots, b_n$  *minimális generátorrendszer*, akkor *független is*.

Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik  $b_i$ , mondjuk  $b_1$  függene a többiektől. Azaz  $b_1 \in \langle b_2, \dots, b_n \rangle = W$ . Ezért  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq W$ , és így  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq W$  (mert  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$  a „legsűkebb”  $\{b_1, \dots, b_n\}$ -et tartalmazó altér). De  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$ , és így  $V \subseteq W = \langle b_2, \dots, b_n \rangle$ . Így  $b_2, \dots, b_n$  generátorrendszer, ami ellentmond  $b_1, \dots, b_n$  minimalitásának.

### Bázis = minimális generátorrendszer

#### Bizonyítás (másik irány)

Ha  $b_1, \dots, b_n$  *bázis*, akkor *minimális generátorrendszer*.

Valóban, ha például  $b_1$ -et elhagyjuk, akkor  $b_2, \dots, b_n$  már nem generátorrendszer, mert ha  $b_1$  függne tőle, akkor  $b_1, \dots, b_n$  összefüggene. Ezért  $b_1, \dots, b_n$  minimális generátorrendszer.  $\square$

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma, és minden maximális független rendszer elemszáma ugyanaz: a vektortér dimenziója.

### Bázis készítése

#### Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk  $n$  elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

#### Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb  $n$  lépésben véget ér.  $\square$

#### Következmény (F4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

#### Bizonyítás

Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz.  $\square$

### Valódi altér dimenziója

#### Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen  $V$  véges dimenziós vektortér és  $W$  *valódi*, vagyis az egész  $V$ -től különböző *altér*. Ekkor  $\dim W < \dim V$ .

Emlékeztető: független elemszáma  $\leq$  generátorrendszer elemszáma.

### Bizonyítás

Legyen  $\dim(V) = n$ .

Ekkor  $W$ -ben minden független rendszer független  $V$ -ben is, ezért legfeljebb  $n$  elemű. Így  $W$ -ben van maximális független  $b_1, \dots, b_m$  rendszer, ami tehát bázis  $W$ -ben, és  $m \leq n$ . Ekkor  $\dim W = m$ .

Indirekt feltevés:  $m = n$ . Ekkor  $b_1, \dots, b_m$  maximális független rendszer  $V$ -ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer  $V$ -ben is, de  $W$ -ben is. Ezért az általa generált altér  $W$  is és  $V$  is, azaz  $W = V$ , ellentmondás.  $\square$

## 4. Vektorrendszer rangja

### A rang definíciója

#### Definíció

Egy vektorrendszer *rangja* az általa generált altér dimenziója.

#### Tétel

Az  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  rangja akkor  $r$ , ha van közöttük  $r$  darab lineárisan független, de  $r$ -nél több lineárisan független nincs.

### Bizonyítás

Legyen  $F$  *maximális független rendszer*  $X$ -ben. Azaz  $F$  független, de  $X$  bármely elemével kibővítve már összefüggő. A korábbi 2. Lemma miatt  $X$  minden eleme függ  $F$ -től. Ezért  $\langle F \rangle$  egy  $X$ -et tartalmazó altér, és így tartalmazza  $\langle X \rangle$ -et. Vagyis  $F$  bázis  $\langle X \rangle$ -ben, és így  $F$  elemszáma az  $X$  rangja.  $\square$

Azaz a rang a *maximális függetlenek elemszáma*. Jele:  $r(X)$ .

### A rang tulajdonságai

Példa: a  $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  rendszer rangja 1, mert  $v_1$  önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a  $v_1$  skalárszorosa.

A maximális függetlenek:  $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_4\}$ , mindegyik 1 elemű.

#### Tétel (HF)

Ha  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  *lineárisan független* vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

- (1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.
- (2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát.

Ha  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  *tetszőleges* vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél  $\langle X \rangle$  és így  $r(X)$  nem változik.

## A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

### Tétel

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = 0$$

...

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében. Ekkor a  $v_1, \dots, v_m$  rendszer rangja a vezéregyesek száma.

Bizonyítás: később.

## 5. Alterek összege

### Alterek összege

#### Állítás

Legyenek  $U$  és  $W$  alterek a  $V$  vektortérben.

Ekkor  $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$  is altér.

Ez az  $U$  és  $W$  alterek összege.

#### Bizonyítás

$U + W$  nem üres, mert  $0 = 0 + 0$  benne van.

Ha  $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$ , ahol  $u_1, u_2 \in U$  és  $w_1, w_2 \in W$ , akkor  $u_1 + u_2 \in U$ , mert  $U$  altér, és  $w_1 + w_2 \in W$ , mert  $W$  altér.

Ezért  $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$ . Azaz  $U + W$  zárt az összeadásra.

A  $\lambda$ -szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF. □

$U + W$  a legszűkebb  $U$ -t és  $W$ -t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az  $u + w$  alakú összegeket.

### Példák alterek összegére

Legyen a térben  $U$  az  $x$ -tengely és  $W$  az  $y$ -tengely.

$U + W$  az  $xy$  sík, vagyis az  $(x, y, 0)$  alakú pontok halmaza.

Mert  $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$  (és ez egyértelmű is).

Álljon  $U$  az  $\mathbb{R}[x]$  azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke. Álljon  $W$  az  $\mathbb{R}[x]$  legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor  $U + W = \mathbb{R}[x]$ , hiszen  $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$ .  $U \cap W$  azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon  $U$  az  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  felső,  $W$  az  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor  $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , hiszen  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ .

$U \cap W$  a diagonális mátrixok.

HF\*:  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ .

## 6. Skaláris szorzat

### Skaláris szorzat és norma

**Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)**

Legyen  $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  és  $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor

$v$  és  $w$  skaláris szorzata  $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = v^T w$ .

$v, w \in \mathbb{R}^n$  merőlegesek vagy ortogonálisak, ha  $\langle v, w \rangle = 0$ . Jele:  $v \perp w$ .

A  $v \in \mathbb{R}^n$  normája vagy hossza  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

**Állítás (F8.1. szakasz, HF)**

Tetszőleges  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén

(1)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$  és  $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$ ;

(2)  $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$  és  $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$ .

### Ortonormált bázis

**Definíció (F8.1.4. Definíció)**

A  $b_1, \dots, b_n$  ortonormált bázis, ONB  $\mathbb{R}^n$ -ben, ha bázis, mindegyik  $b_i$  hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben:  $\|b_i\| = 1$  minden  $i$ -re, és  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ , ha  $i \neq j$ . (Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

**Állítás**

Ortonormált bázisban  $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$ .

**Bizonyítás**

Ha  $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ , akkor  $b_i$ -vel skalárisan szorozva

$$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \lambda_i.$$

□



## 7. Összefoglaló

### A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

#### Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

#### Tételek

Független rendszer elemszáma  $\leq$  generátorrendszer elemszáma.

$|\text{Független}| \leq \text{dimenzió}$ .  $|\text{Generátorrendszer}| \geq \text{dimenzió}$ .

A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma. A bázis maximális független, minimális generátorrendszer.

Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.

Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma. A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.

Alterek összegének dimenziója. Vektor koordinátái ONB-ben.