1. Bevezetés

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

Tankönyv: *Freud Róbert: Lineáris algebra.*
Konzultáció: `ewwkiss@gmail.com`

A számonkérés módja

- *A gyakorlat* célja az elméleti anyag *megértése.*
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az *előző heti* előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

- *Írásbeli vizsga.* Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
  - Három rész (minta az előző évi vizsgák a honlapon):
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;
    - bizonyítás (a tételek listája az utolsó prezentáció végén).

Honlap: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`

2. Vektortér

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció
Legyen T test. A T fölötti n magasságú *oszlopvektorok* az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció
Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az *összeadást* és a λ *skalárral szorzást* ($\lambda \in T$). Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

A *nullvektor* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az *ellentett*: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0x + \ldots + a_nx^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a *pontonkénti* műveletekre):
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\lambda f)(x) = \lambda\big(f(x)\big)$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)
T test (elemei a *skalárok*), V halmaz (elemei a *vektorok*). V *vektortér* T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (*LÉTEZIK* 0 *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (*LÉTEZIK* $-u$, az u *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés
A vektorok irányított szakaszok, de két vektor *egyenlő*, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak. Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.
Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont *helyvektora.* Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c). Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF). A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg. Ezért a térvektorok vektortere „ugyanolyan”, mint az oszlopvektorok $\mathbb{R}^3$ vektortere.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re
Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$. $\square$

A fenti (4) miatt.
A (7) vektortéraxióma miatt.
A (8) vektortéraxióma miatt.

3. Altér, generátorrendszer

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)
Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz *altér*, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött. W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött. W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött. W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött.
W a felső háromszögmátrixok.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)
Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W *zárt az összeadásra*, azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W *zárt a skalárral szorzásra*, azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

(3) Két altér uniója *csak akkor* altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

Altér készítése

Kérdés
Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az $ax + bx^2$ alakú polinomok már alteret alkotnak ($a, b \in \mathbb{R}$).

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben. Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által *generált altér*, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: *generátorok.*
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy *lineáris kombinációja.*
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az *együtthatói.*
A $v_1, \ldots, v_m$ *generátorrendszer* a V vektortérben, ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.
Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert
$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$
vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak! Például $\{1, x, x^2\}$ *nem* generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)
Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés
$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a *legszűkebb* $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert
$\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra.
Így $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ minden eleme W-ben van. $\square$

4. Lineáris függés és függetlenség

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$. Ezek a vektorok *lineárisan függetlenek*, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in V$ vektorok *lineárisan összefüggők*.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla. Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha *CSAK* a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenekre.
A $v_1, \ldots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha *nincs szabad változó.*
Következmény: Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggenek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött, ha egy síkban vannak.

Bizonyítás: HF.

5. Bázis

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)
Egy vektorrendszer *bázis*, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme *egyértelműen felírható* a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Példák bázisra
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1 + x) + \beta(1 + x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$ pontosan akkor, ha $c = \alpha+\beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta+\gamma$, azaz ha $\alpha = b$, $\beta = c-b$ és $\gamma = a+b-c$.
Lineáris egyenletrendszer az α, β, γ ismeretlenekre.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket *szokásos* bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \dots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben
az $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ bázis.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)
Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)
A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér *dimenziójának* nevezzük.
Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér
$n + 1$-dimenziós T fölött.

6. Összefoglaló

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett. A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok. Altér, generált altér, generátorrendszer. Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek
Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2). Altér jellemzése zártsággal, altér nullelemе (F4.2.15. Feladat). A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér. A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval. Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével. Bármely két bázis elemszáma ugyanaz.