Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

9. előadás

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ két különböző, megfelelő fölírás,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ két különböző, megfelelő fölírás, így ez nem egyértelmű. $\square$

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W direkt összege,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes
direkt összege.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes
direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.
W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U+W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.
W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.
Ekkor $T[x] = U \oplus W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \dots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m)$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. $\square$

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.
A bizonyítás hasonló az előző tételéhez: HF. $\square$

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát,

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$,

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^{\perp}$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^\perp = \{0\}$. Kell még: $U + U^\perp = V$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \dots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. □

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. □

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \dots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. □

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \dots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^{\perp}$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^{\perp}$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^{\perp})^{\perp} = U$, $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$, $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v)\rangle = 0$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert
$\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire, azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert
$\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$ és $v \in W^{\perp}$. $\square$

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \dots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \dots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \dots, b_m$ bázisban K. Hasonlóan
A megszorítható W-re,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \dots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \dots, b_m$ bázisban K. Hasonlóan
A megszorítható W-re, és ennek mátrixa $b_{m+1}, \dots, b_n$-ben L.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor:

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják,

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \dots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \dots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \dots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \dots + \mu_n \lambda b_n$.
Tehát $A(v) = \lambda v$ akkor és csak akkor, ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n$.
Tehát $A(v) = \lambda v$ akkor és csak akkor, ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Ha a bázis ortonormált, akkor a bázis két diszjunkt részhalmaza két merőleges alteret generál (HF). $\square$

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Az előző Állítás miatt A sajátalterei páronként merőlegesek.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Az előző Állítás miatt A sajátalterei páronként merőlegesek.

HF: Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor A és A^* sajátalterei ugyanazok.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda}w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda}w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda}w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda}w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda}w, A^*(w) - \overline{\lambda}w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle = \langle w, \lambda w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle = \langle w, \lambda w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$ és

$\langle w, A^*(w) \rangle = \langle A(w), w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle = \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$,

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért
$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle = \langle w, \lambda w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$ és

$\langle w, A^*(w) \rangle = \langle A(w), w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle = \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w) \rangle = \langle w, AA^*(w) \rangle = \langle w, A^*A(w) \rangle = \langle A(w), A(w) \rangle$,

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle = \langle w, \lambda w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$ és

$\langle w, A^*(w) \rangle = \langle A(w), w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle = \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w) \rangle = \langle w, AA^*(w) \rangle = \langle w, A^*A(w) \rangle = \langle A(w), A(w) \rangle$,

ami $\langle \lambda w, \lambda w \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért
$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,
ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért
$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,
ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle$. Összevonva minden kiesik. $\square$

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. □

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris
transzformációk, és $AB = BA$,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk, és $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris
transzformációk, és $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere
B-invariáns, és ezért van közös sajátvektoruk.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\bigl(A^*(w)\bigr) = A^*\bigl(A(w)\bigr)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \dots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \dots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \dots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,
és $V = W \oplus W^\perp$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,
és $V = W \oplus W^\perp$. Ez a bázis A sajátvektoraiból áll. $\square$

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer,

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független,

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben.
HF: ebben a bázisban A mátrixa felső háromszögmátrix.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_\mathbf{b}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_\mathbf{b}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.
HF: $A = A^*$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.
HF: $A = A^*$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w \implies \lambda = \mu$ vagy $v \perp w$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni:

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.
Az ellipszist ebből a $z = 1$ sík metszi ki.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól. A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából, tehát akkor a nullák száma sem függ a bázistól.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \le 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \le 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0 .$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0 \, .$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \le 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \ge 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \le 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$, így a függetlenség miatt minden $y_j = 0$. □

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1), továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1), továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így $k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.
A két bázist megcserélve $k_2 \leq k_1$. $\square$

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.
A direkt összeg bázisa és dimenziója.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.
A direkt összeg bázisa és dimenziója.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.
A direkt összeg bázisa és dimenziója.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése.
Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.
A direkt összeg bázisa és dimenziója.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése.
Ha W A-invariáns, akkor $W^\perp$ A^*-invariáns.
Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér.
Invariáns altér.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.
A direkt összeg bázisa és dimenziója.
Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése.
Ha W A-invariáns, akkor $W^\perp$ A^*-invariáns.
Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.
Normális transzformáció sajátalterei.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.
7. Az invertálhatóság jellemzései.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.
7. Az invertálhatóság jellemzései.
8. Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.
7. Az invertálhatóság jellemzései.
8. Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
9. Minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.
7. Az invertálhatóság jellemzései.
8. Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
9. Minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak.
10. Sorrang = oszloprang.

Vektorterek, lineáris leképezések

1. Független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy generátorrendszer elemszáma.
2. Valódi altér dimenziója.
3. A rang a maximális függetlenek elemszáma.
4. Az előírhatósági tétel.
5. A bázistranszformáció képlete.
6. A dimenziótétel.
7. Az invertálhatóság jellemzései.
8. Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
9. Minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak.
10. Sorrang = oszloprang.
11. Szorzat rangjának két felső becslése.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^{*}-invariáns.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^\perp$ A^*-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.
18. Normális transzformáció ONB-ben diagonalizálható.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^{*}-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.
18. Normális transzformáció ONB-ben diagonalizálható.
19. A főtengelytétel.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.
18. Normális transzformáció ONB-ben diagonalizálható.
19. A főtengelytétel.
20. Ortonormált bázisban a kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.
18. Normális transzformáció ONB-ben diagonalizálható.
19. A főtengelytétel.
20. Ortonormált bázisban a kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.
21. A tehetetlenségi tétel.

Euklideszi terek

12. A CBS-egyenlőtlenség.
13. Nem nulla vektorok ortogonális rendszere független.
14. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.
15. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.
16. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.
17. Normális transzformáció adjungáltjának sajátvektorai.
18. Normális transzformáció ONB-ben diagonalizálható.
19. A főtengelytétel.
20. Ortonormált bázisban a kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.
21. A tehetetlenségi tétel.

A felsorolt 21 bizonyítás szerepelhet a vizsga harmadik részében.