Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

7. előadás

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok

skaláris szorzata

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \ldots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.
$\langle v, w \rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok
skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.
$\langle v, w \rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w\rangle$.
$\langle v, w\rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.
$\langle v, w \rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok

skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w\rangle$.

$\langle v, w\rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w\rangle = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \ldots, b_n$ bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok
skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.
$\langle v, w \rangle = v^T u$, azaz mátrixszorzással is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \ldots, b_n$ bázishoz tartozó skaláris szorzat.

A fenti $\mathbb{R}^n$-ben a szokásos bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat,

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: az első változóban lineáris

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: az első változóban lineáris
(vagyis $A(v) = \langle v, w\rangle$ lineáris leképezés minden rögzített w-re).

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti
az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz,
mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$,

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. □

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti
az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz,
mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.
A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti
az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz,
mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.
A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció

A v normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti
az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz,
mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. □

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.
A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció

A v normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
A v és w távolsága $\|v - w\|$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.
v **merőleges** w-re,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos \alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos \alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w \rangle = 0$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos \alpha$.
v **merőleges** (**ortogonális**) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.
v **merőleges** (**ortogonális**) w-re, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.
(Emiatt két vektor szöge értelmes,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v **merőleges** (**ortogonális**) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.
(Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ jön ki.)

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.
v **merőleges** (**ortogonális**) w-re, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.
(Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ jön ki.)

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.
(Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ jön ki.)

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll,

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció

Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$.
A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos \alpha$.
v merőleges (ortogonális) w-re, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.
(Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ jön ki.)

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket,

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re,

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. $\square$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. $\square$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. □

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w \rangle$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. $\square$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w \rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. □

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w \rangle = x^2 \langle v, v \rangle + 2x \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom,

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. □

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom, melynek a főegyütthatója pozitív.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. □

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom, melynek a főegyütthatója pozitív.
Így $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 \leq 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás

Ha $a > 0$, akkor az $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \leq 0$.
Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$. $\square$

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom, melynek a főegyütthatója pozitív.
Így $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 \leq 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$. Négyzetgyökvonással kész.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$,

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$,

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. □

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.

$$\|v + w\|^2$$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.

$$\langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v,w\rangle\right)^2 = 4\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v+w, v+w\rangle = \|v+w\|^2$

$(\|v\| + \|w\|)^2$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.

$$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$$
$$\|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 =$$
$$(\|v\| + \|w\|)^2$$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$,

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$,

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v,w\rangle\right)^2 = 4\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v+w, v+w\rangle = \|v+w\|^2$
$\langle v,v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v,w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$, és $0 \leq \langle v,w\rangle$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $(2\langle v, w\rangle)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$, és $0 \leq \langle v, w\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle$

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$, és $0 \leq \langle v, w\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\lambda\langle v, v\rangle$,

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség

Ha $\left(2\langle v, w\rangle\right)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke.
Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. $\square$

Háromszög-egyenlőtlenség

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v + w, v + w\rangle = \|v + w\|^2$
$\langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt az egyenlőtlenség igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$, és $0 \leq \langle v, w\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\lambda\langle v, v\rangle$, ami azzal ekvivalens, hogy $-\lambda \geq 0$. $\square$

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja" $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle$

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$, és $\langle b_j, b_j\rangle = \|b_j\|^2 = 1$. $\square$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$,

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$,

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció)

Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció)

Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá.
Speciálisan minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v \rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v \rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \dots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \dots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \dots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \dots, b_{m+1}$ ortonormált.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó
skaláris szorzat ugyanaz,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata.
Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle$

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont távolsága a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle = \sum_j \lambda_j \mu_j$. $\square$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla.

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$, ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1,-1,0,0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0,0,1,-1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1,0,0,-1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2,1/2,-1/2,-1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2,1/2,-1/2,-1/2)$.
Legyen most $v = (1,0,0,0)$,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
Ennek hossza $\sqrt{4 \cdot (1/4)^2} = 1/2$,

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
Ennek hossza $\sqrt{4 \cdot (1/4)^2} = 1/2$, ezért
$b_4 = w/(1/2)$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.)
Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$
ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává,
majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
Ennek hossza $\sqrt{4 \cdot (1/4)^2} = 1/2$, ezért
$b_4 = w/(1/2) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda}\langle v, w \rangle$.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda}\langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda}\langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w\rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w\rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda}\langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda\langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \dots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w\rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Szöget nem definiálunk.

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
$\langle v, w\rangle = [v]_{\mathbf{b}}^*[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ transzponált konjugáltja.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Szöget nem definiálunk. A többi eddigi működik $\mathbb{C}$ fölött is.

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér,

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$,

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v\rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = \left(\left(\langle b_i, A(b_j)\rangle\right)\right)$

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$,

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v \rangle$,

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \dots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v \rangle$, mert a skaláris szorzat a második tényezőben lineáris.

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \dots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v\rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = \left(\left(\langle b_i, A(b_j)\rangle\right)\right)$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j)\rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v\rangle$, mert a skaláris szorzat a második tényezőben lineáris.
Ha az A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme λ_{ij},

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v\rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j)\rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v\rangle$, mert a skaláris szorzat a második tényezőben lineáris.
Ha az A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme λ_{ij}, akkor $A(b_j) = \lambda_{1j} b_1 + \ldots + \lambda_{nj} b_n$. $\square$

Transzformáció mátrixa

Állítás

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v\rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j)\rangle$).

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel balról skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v\rangle$, mert a skaláris szorzat a második tényezőben lineáris.
Ha az A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme λ_{ij}, akkor $A(b_j) = \lambda_{1j} b_1 + \ldots + \lambda_{nj} b_n$. □

Komplex fölött fontos a tényezők sorrendje a skaláris szorzatban!

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér,

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ $\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga,

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_\mathbf{b}$ és $[B]_\mathbf{b}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A **adjungáltja**, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A **adjungáltja**, ha $[A]_\mathbf{b}$ és $[B]_\mathbf{b}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Az (egyértelműen meghatározott) B jele A^*.

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_\mathbf{b}$ és $[B]_\mathbf{b}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga,
ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Az (egyértelműen meghatározott) B jele A^*.
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja,

Adjungált transzformáció

Definíció

Legyen V euklideszi tér, $b_1, \dots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A adjungáltja, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)

A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Az (egyértelműen meghatározott) B jele A^*.
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^*.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$,

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$,

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w]$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w]$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w]$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w])$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)]$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor

$$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$$
$$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w) \rangle.$$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \ldots, b_n$ az ONB-t.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \dots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re,

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor

$$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$$
$$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle.$$

Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \ldots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re,
akkor $\langle B(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, A(b_j)\rangle$ minden i, j-re.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w \rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w \rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w) \rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \dots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden v, w-re,
akkor $\langle B(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, A(b_j) \rangle$ minden i, j-re.
Mivel $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i) \rangle} = \langle b_i, A(b_j) \rangle$.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \dots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re,
akkor $\langle B(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, A(b_j)\rangle$ minden i, j-re.
Mivel $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i)\rangle} = \langle b_i, A(b_j)\rangle$.
Tudjuk, hogy $[A] = ((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \ldots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re,
akkor $\langle B(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, A(b_j)\rangle$ minden i, j-re.
Mivel $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i)\rangle} = \langle b_i, A(b_j)\rangle$.
Tudjuk, hogy $[A] = ((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$ és $[B] = ((\langle b_i, B(b_j)\rangle))$.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás

Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$.
Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben.
Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \ldots, b_n$ az ONB-t.
Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re,
akkor $\langle B(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, A(b_j)\rangle$ minden i, j-re.
Mivel $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i)\rangle} = \langle b_i, A(b_j)\rangle$.
Tudjuk, hogy $[A] = ((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$ és $[B] = ((\langle b_i, B(b_j)\rangle))$.
Transzponáláskor az indexek megcserélődnek, ezért $[B]^* = [A]$. $\square$

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú.
Ez speciális felső háromszögmátrix.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú.
Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés),

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Tétel (F8.5.2. Tétel)

Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban,

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Tétel (F8.5.2. Tétel)

Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha $AA^* = A^*A$

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban Jordan-alakú. Ez speciális felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Tétel (F8.5.2. Tétel)

Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha $AA^* = A^*A$ (normális transzformáció).

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(3) A normatartó,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \ \|Au\| = \|u\|$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)$ $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)$ $\|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)$ $\|Au - Av\| = \|u - v\|$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]^*_{\mathbf{b}}$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]^*_{\mathbf{b}}$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]^*_{\mathbf{b}}$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valósban ortogonális,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A skalárszorzattartó, azaz $(\forall u, v)\ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A normatartó, azaz $(\forall u)\ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A távolságtartó, azaz $(\forall u, v)\ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valósban ortogonális, komplexben unitér.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

$(1) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (1)$ és $(2) \Longrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4)$ triviális.

$(1) \Longrightarrow (2)$: Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.

$(3) \Longrightarrow (2)$: $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\implies$ (6) $\implies$ (8) $\implies$ (1) és (2) $\implies$ (3) $\iff$ (4) triviális.
(1) $\implies$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\implies$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.

(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.

$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,

és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

$(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1)$ és $(2) \implies (3) \iff (4)$ triviális.
$(1) \implies (2)$: Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
$(3) \implies (2)$: $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

$(1) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (1)$ és $(2) \Longrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4)$ triviális.
$(1) \Longrightarrow (2)$: Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
$(3) \Longrightarrow (2)$: $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\implies$ (6) $\implies$ (8) $\implies$ (1) és (2) $\implies$ (3) $\iff$ (4) triviális.
(1) $\implies$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\implies$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\implies$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

$(1) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (1)$ és $(2) \Longrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4)$ triviális.

$(1) \Longrightarrow (2)$: Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.

$(3) \Longrightarrow (2)$: $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.

$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,

és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.

Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

$(2) \Longrightarrow (5)$: $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda\in\mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\implies$ (6) $\implies$ (8) $\implies$ (1) és (2) $\implies$ (3) $\iff$ (4) triviális.
(1) $\implies$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\implies$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\underline{\langle v, v\rangle} =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\implies$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\implies$ (7): triviális. (7) $\implies$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \dots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\implies$ (6) $\implies$ (8) $\implies$ (1) és (2) $\implies$ (3) $\iff$ (4) triviális.
(1) $\implies$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\implies$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\implies$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\implies$ (7): triviális. (7) $\implies$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\iff$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$
azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$
azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$
azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.
A felcserélhető az inverzével,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$,
tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$,
és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$
azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.
A felcserélhető az inverzével, így $A^* = A^{-1} \Longrightarrow A$ normális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,
ha az áttérés mátrixa unitér,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,
ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.
Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan
unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,
ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.
Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan
unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,
ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.
Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan
unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy
felcserélhető a transzponáltjával.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor
és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,
ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.
Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan
unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy
felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az
következik, hogy komplex fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy komplex fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy komplex fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy komplex fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy komplex fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1.
Mi a legszebb alakja valós fölött?

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden

blokk vagy 1×1-es,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden

blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre" „bontható".

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.

Az A mátrixa ONB-ben M.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre" „bontható".

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.
Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.
Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \overline{v})/\sqrt{2}$.

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre" „bontható".

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.

Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.

Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \overline{v})/\sqrt{2}$.

Ekkor b_1 és b_2 valós,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.

Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.

Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \overline{v})/\sqrt{2}$.

Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált,

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre" „bontható".

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.
Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \overline{v})/\sqrt{2}$.
Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, és ebben a kételemű bázisban A mátrixa a fenti forgatás.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás. Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció,

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött. Komplex feletti transzformáció alkalmas ONB-ben háromszögmátrix.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött. Komplex feletti transzformáció alkalmas ONB-ben háromszögmátrix. Az egybevágósági transzformációk jellemzései.

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás.
Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis.
Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek

A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség.
Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban.
Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött. Komplex feletti transzformáció alkalmas ONB-ben háromszögmátrix. Az egybevágósági transzformációk jellemzései. Ortogonális transzformáció blokkfelbontása.