Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

6. előadás

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük:

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az. A főtengelytételt a 9. előadáson bizonyítjuk.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk). Az ebben szereplő direkt összegről a 9. előadáson lesz szó.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el. Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \qquad 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el. Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x + 4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis, M nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval):

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

$$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó **Jordan-blokk**:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0.
Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű:

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott

az,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.
Haszna: van képlet a Jordan-alak hatványozására (később).

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel

Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője a legnagyobb λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete.

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel

Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője a legnagyobb λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete. Például

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

minimálpolinomja $m_M(x) = (x-2)(x-3)(x-1)^3x^2$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$,

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.

Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.

Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es,

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es,
emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es,
emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad N : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{illetve} \qquad N : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első két mátrix hasonló, csak a blokkok sorrendjében különbözik.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok,

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98}$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98}$$

(A felső blokk 90°-os forgatás!)

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ (A felső blokk 90°-os forgatás!)

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^{k}$ főátlója felett nulla áll;

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^{k}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^{k}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{k} =$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető,

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló" végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló" végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k =$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^{k}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló'' végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.
Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. $\square$

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója:

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja,

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja:

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

F3.4.1. Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai,

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \dots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \dots, w_m$ az oszlopai.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai.
Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \dots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \dots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \dots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \dots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \dots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \dots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort,

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort. A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort. A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$. A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$.
Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.
A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

Bizonyítás

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort. A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$. A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$. A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$. Vagyis w komponenseinek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja tényleg nulla. $\square$

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra,

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek,

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben,

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \dots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \dots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \dots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m,

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m, és N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m, és N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m, és N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től. Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor L sorai összefüggenek, mert T^m-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg.

Sorrang és oszloprang: Következmény

Gyorsabb bizonyítás a Lemmára: a feltétel szerint s ortogonális a $w_1, \ldots, w_m$ vektorokra, így minden lineáris kombinációjukra is.

Következmény

Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás

Legyen $w_1, \ldots, w_m$ oszlopok maximális független rendszere N-ben, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m, és N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től. Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor L sorai összefüggenek, mert T^m-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg. De akkor N sorai is összefüggenének a Lemma miatt, ellentmondás. $\square$

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt N oszloprangja legalább k,

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \operatorname{Im} A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \operatorname{Im} A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus,

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang

Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt
N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

$r(A) = r([A])$ bizonyítása

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus, így megőrzi a rangot (HF). $\square$

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;
- az egyik vektort nem nulla skalárral szorozzuk.

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;
- az egyik vektort nem nulla skalárral szorozzuk.

Ha ezt a sorokkal végezzük, akkor a sorrang nem változik,

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;
- az egyik vektort nem nulla skalárral szorozzuk.

Ha ezt a sorokkal végezzük, akkor a sorrang nem változik, ha az oszlopokkal, akkor az oszloprang nem változik. $\square$

Gauss-elimináció és rang

Állítás

A mátrix rangja nem változik, ha akár a sorokkal, akár az oszlopokkal Gauss-eliminációs lépéseket végzünk.

Bizonyítás

Láttuk: vektorrendszer rangja nem változik, ha

- az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát;
- az egyik vektort nem nulla skalárral szorozzuk.

Ha ezt a sorokkal végezzük, akkor a sorrang nem változik, ha az oszlopokkal, akkor az oszloprang nem változik. □

Házi Feladat: A Gauss-elimináció végeztével a vezéregyesek száma megegyezik a mátrix sorrangjával.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy,
hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix
determinánsa nem nulla;

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő a rangjával.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy,
hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő a rangjával.

Bizonyítási ötlet: Megmutatható, hogy Gauss-eliminációs lépések során a determinánsrang sem változik (lásd F3.4.2. Tétel).

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő a rangjával.

Bizonyítási ötlet: Megmutatható, hogy Gauss-eliminációs lépések során a determinánsrang sem változik (lásd F3.4.2. Tétel).
Mivel $\det(N) = \det(N^T)$ minden négyzetes mátrixra,

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő a rangjával.

Bizonyítási ötlet: Megmutatható, hogy Gauss-eliminációs lépések során a determinánsrang sem változik (lásd F3.4.2. Tétel). Mivel $\det(N) = \det(N^T)$ minden négyzetes mátrixra, ezen az úton új bizonyítást kaphatunk a sorrang és az oszloprang egyenlőségére.

Összeg rangja

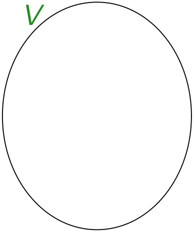
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.

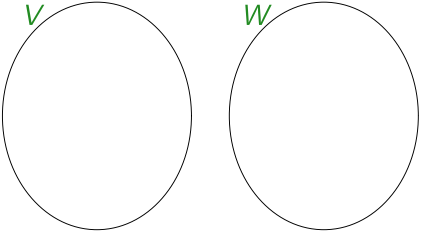
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



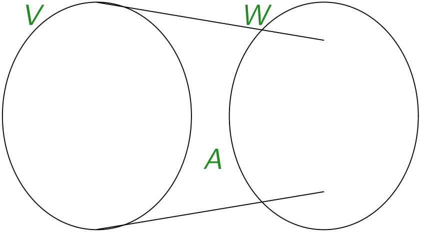
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



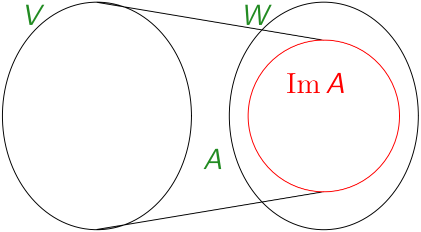
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



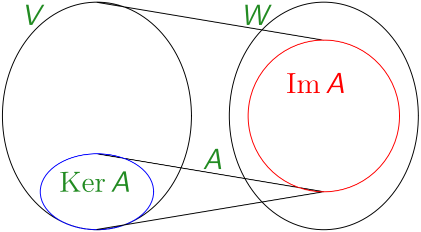
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



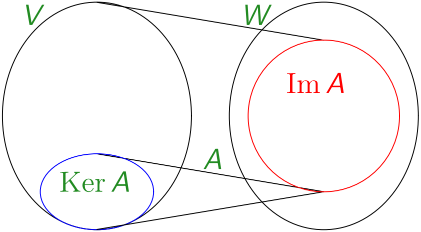
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



Összeg rangja

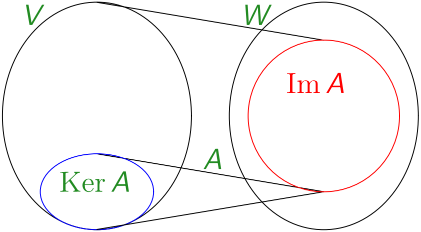
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \le \dim V$ és $r(A) \le \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

Összeg rangja

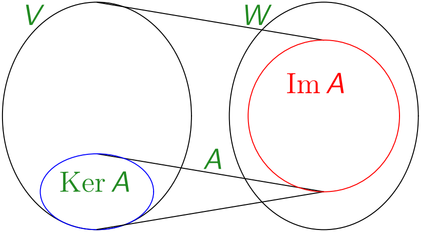
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



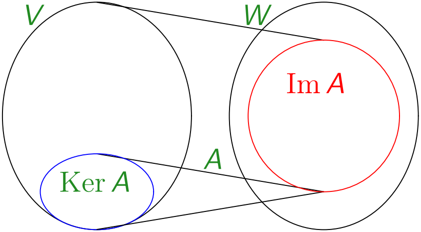
$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$

$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

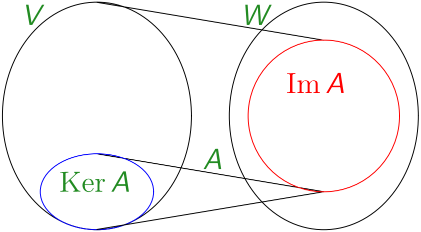
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



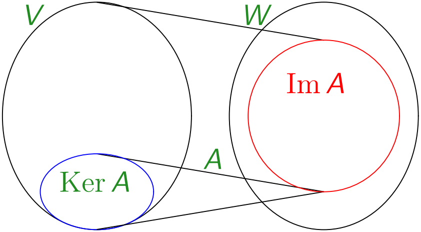
$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

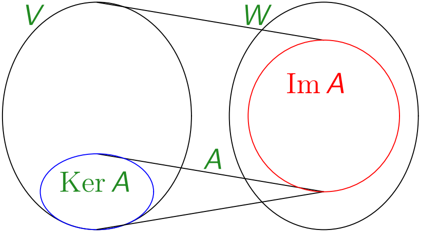
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \le \dim V$ és $r(A) \le \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim W$

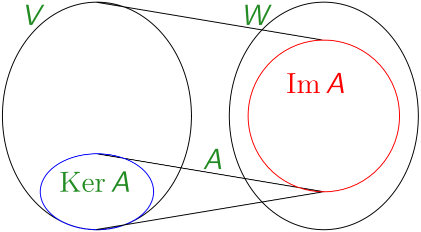
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

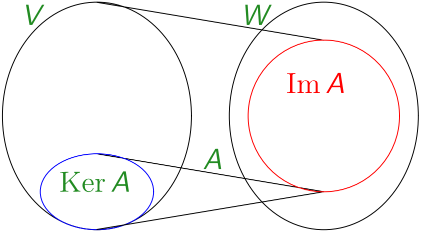
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. $\square$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre,

Szorzat rangja

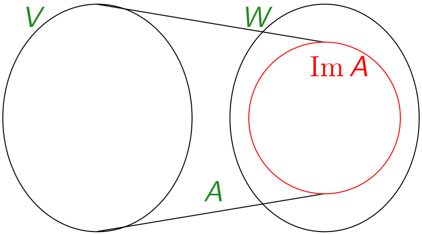
Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

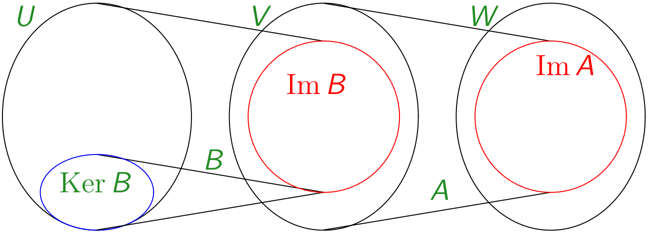
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

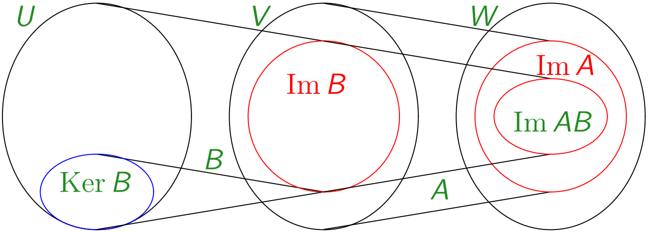
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

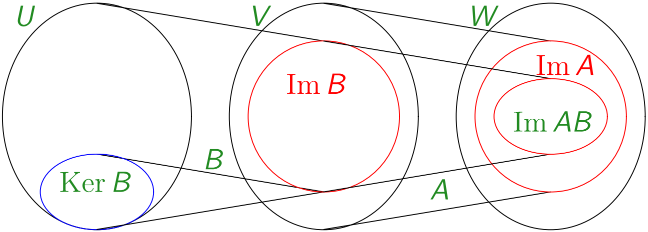
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



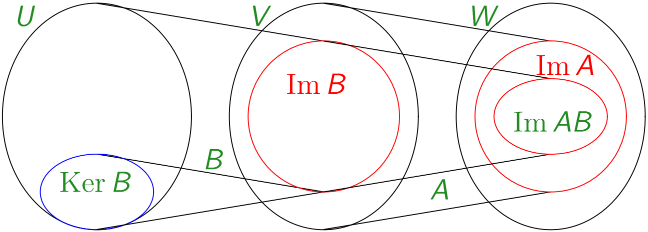
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



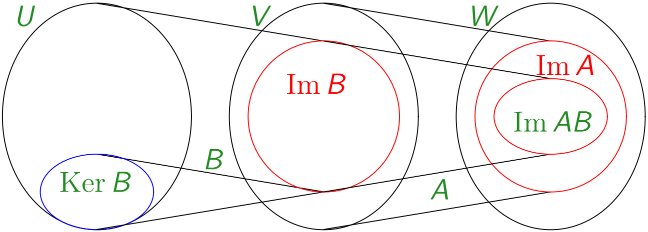
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



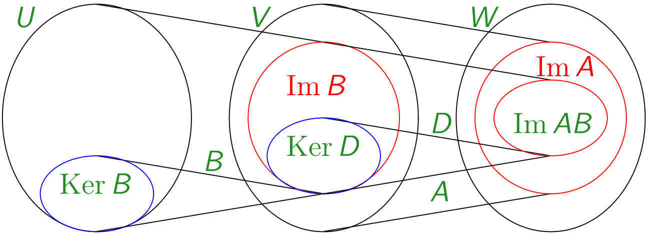
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



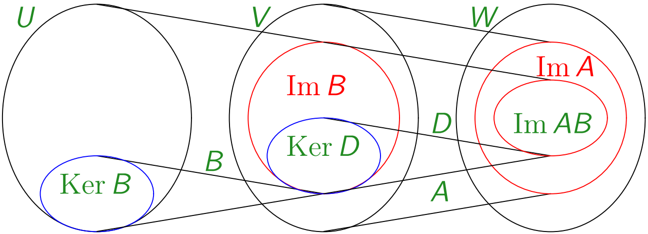
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



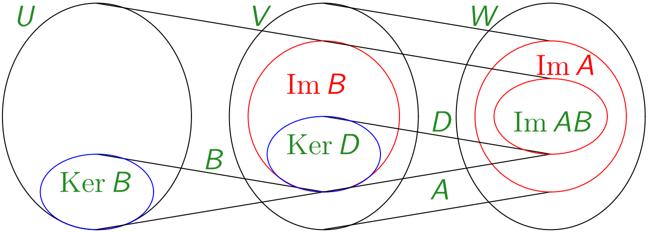
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



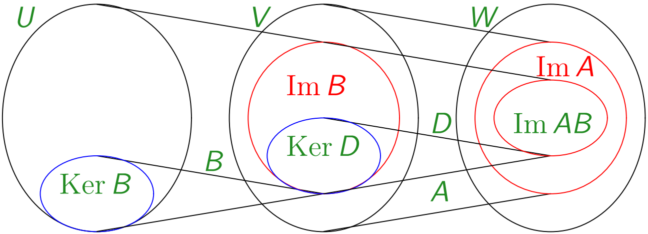
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\, D \leq \dim \mathrm{Im}\, B = r(B)$. $\square$

A kibővített mátrix

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n
\end{gathered}
$$

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$ a **kibővített** mátrix.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával:

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják.
Akkor és csak akkor egyértelmű a megoldás, ha M oszlopai lineárisan függetlenek is.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról,

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A sorrang és az oszloprang egyenlősége.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A sorrang és az oszloprang egyenlősége. A rang két felső becslése.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A sorrang és az oszloprang egyenlősége. A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Sorrang, oszloprang, determinánsrang. Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A sorrang és az oszloprang egyenlősége. A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.