Algebra2, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
www.cs.elte.hu/~ewkiss
ewwkiss@gmail.com

1. előadás

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

Tankönyv: Freud Róbert: Lineáris algebra.

A félév anyaga: lineáris algebra

- Vektorterek, alterek
- Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

Tankönyv: Freud Róbert: Lineáris algebra.

Konzultáció: `ewwkiss@gmail.com`

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:

Honlap: www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.

Honlap: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
  - Három rész (minta az előző évi vizsgák a honlapon):

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
  - Három rész (minta az előző évi vizsgák a honlapon):
    - beugró a röpzéhák anyagából;

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
  - Három rész (minta az előző évi vizsgák a honlapon):
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;

Honlap: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`

A számonkérés módja

- A gyakorlat célja az elméleti anyag megértése.
  - Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
  - Begyakorlás otthon: feladatok Freud Róbert könyvében.
  - Három hiányzás megengedett. Minden gyakorlaton röpZH:
    - az előző heti előadás tételeiből, definícióiból
    - (ehhez minden prezentáció legvégén összefoglaló);
    - 50%-ot kell elérni, különben a gyakorlati jegy elégtelen.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
    - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
- Írásbeli vizsga. Ez a prezentáció definiálja a vizsgaanyagot.
  - Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
  - Három rész (minta az előző évi vizsgák a honlapon):
    - beugró a röpzéhák anyagából;
    - megértés-ellenőrző;
    - bizonyítás (a tételek listája az utolsó prezentáció végén).

Honlap: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok,

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást és a λ skalárral szorzást

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$$

összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást ($\lambda \in T$).
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett:

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai:

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0x + \ldots + a_nx^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre):

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0x + \ldots + a_nx^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre):
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0x + \ldots + a_nx^n) = (\lambda a_0) + \ldots + (\lambda a_n)x^n$.
- Valós függvények (a pontonkénti műveletekre): $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok),

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás,

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor)

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a skalárok), V halmaz (elemei a vektorok).
V vektortér T fölött, ha értelmezett a V-beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor $=$ vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (LÉTEZIK 0 nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ (LÉTEZIK $-u$, az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak,

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő,
ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés
kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).
A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg.

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.
Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
Az A pont és az $\overrightarrow{OA}$ vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az $\overrightarrow{OA}$ az A pont helyvektora.
Ha $A = (a, b, c)$, akkor $\overrightarrow{OA}$ jele is (a, b, c).
Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).
A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg. Ezért a térvektorok vektortere „ugyanolyan”, mint az oszlopvektorok $\mathbb{R}^3$ vektortere.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 =$

A fenti (4) miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v =$

A (7) vektortéraxióma miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v =$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$

A (8) vektortéraxióma miatt.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 skalár is, vektor is).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$. □

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér,

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött.

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz altér, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött.
W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.
Azaz W az x-tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött.
W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött.
W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött.
W a felső háromszögmátrixok.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$,

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött.
A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra,
azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra,
azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

(3) Két altér uniója csak akkor altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az $ax + bx^2$ alakú polinomok már alteret alkotnak ($a, b \in \mathbb{R}$).

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \dots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \dots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \dots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.
Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \dots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert
$\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$,
mert W zárt a skalárral szorzásra.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \in W$,

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a legszűkebb $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a **legszűkebb** $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.
Ha $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra.
Így $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ minden eleme W-ben van. $\square$

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet,

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független,

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött,
mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom),

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött,
mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom),
akkor minden együttható nulla,

Lineáris függetlenség

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} =$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} +$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} =$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} +$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1 + 4\lambda_2\\3\lambda_1 + 5\lambda_2\end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1+4\lambda_2\\3\lambda_1+5\lambda_2\end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok $\mathbb{R}$ fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix},$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$
$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{gathered} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a vektorok magassága,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggenek

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggenek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független,

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő,

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa,

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött,

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött,

Bizonyítás: HF.

A függetlenség elemi tulajdonságai

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött, ha egy síkban vannak.

Bizonyítás: HF.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független és generátorrendszer.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme **egyértelműen felírható** a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor,

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer bázis, ha lineárisan független
és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ez pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme
egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$,

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = c - b$

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x,\ \ 1 + x^2,\ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = c - b$ és $\gamma = a + b - c$.

Példák bázisra

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ is bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$,
azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ-ra és μ-re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V-beli polinom
egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x, \ \ 1 + x^2, \ \ x^2\}$ is bázis V-ben. Valóban:
$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha+\beta) + \alpha x + (\beta+\gamma)x^2$
pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$,
azaz ha $\alpha = b$, $\beta = c - b$ és $\gamma = a + b - c$.
Lineáris egyenletrendszer az α, β, γ ismeretlenekre.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük. A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük. A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1,\ldots,e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla. Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla.
Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla
(ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.
A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(2) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi nulla. Speciálisan T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ bázis.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük. Jele $\dim V$

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(2) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m\times n} = mn$.

(5) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér $n+1$-dimenziós T fölött.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal,

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak,

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb,
az adott elemeket tartalmazó altér.
A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.
A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.
Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.
A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.
Altér, generált altér, generátorrendszer.
Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).
Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).
A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb,
az adott elemeket tartalmazó altér.
A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.
Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.
Bármely két bázis elemszáma ugyanaz.