Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi, B változat (2014. május 13.) — eredmények és pontozás

1. A leképezés mátrixa a szokásos bázisban $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), ami önadjungált (1 pont), ezért normális (1 pont), de mivel $M^*M \neq E$, ezért nem unitér (1 pont). $A(v) = (4, -4i, 4)^T$ (1 pont), így $\langle v, A(v) \rangle = 2 \cdot 4 + \overline{(-i)}(-4i) + 3 \cdot 4 = 24$ (1 pont).

2. A mátrix $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek 11 és -2 (2 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$11\Big(\frac{3x+2y}{\sqrt{13}}\Big)^2 - 2\Big(\frac{-2x+3y}{\sqrt{13}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

3. A karakterisztikus polinom $x^2(x-2)^2$ (1 pont), a sajátértékek 0 és 2 (1 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x-2)$, $x^2(x-2)$, $x(x-2)^2$, $x^2(x-2)^2$. Ezekbe a mátrixot helyettesítve a minimálpolinom $x^3 - 2x^2$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 0-hoz, illetve 2-höz tartozó blokk 2×2-es, illetve 1×1-es (1 pont). Mivel a 2 kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért a még szereplő 1×1-es blokban 2 a sajátérték, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

4. Ha $u = v$, akkor a feltétel teljesül, de $u - 3v = -2u$ nem merőleges $u + v = 2u$-ra, ha $u \neq 0$ (5 pont). Ez a példa komplexben is megfelelő (1 pont).

5. A W elemeit nyilván az $x = y$ és $u = v$ feltétel jellemzi, ezért például $b_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ és $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ megfelelő ONB ebben az altérben (3 pont). Gram-Schmidt eljárással folytatva ha $v = (4, 2, 1, 3)$, akkor $b = v - \langle b_1, v \rangle b_1 - \langle b_2, v \rangle b_2 = (1, -1, -1, 1)$ (2 pont), a keresett távolság $\|b\| = 2$ (1 pont).

6. Például

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (4 pont),}$$

melynek a minimálpolinomja $(x-1)(x^2 - x + 1)$ (2 pont). (Forgatásokat tartalmazó 2×2-es, és ± 1-et tartalmazó 1×1-es blokkokkal érdemes próbálkozni a tanult tétel szerint.)