Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi, A változat (2014. május 13.) — eredmények és pontozás

1. A leképezés mátrixa a szokásos bázisban $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), ami nem önadjungált (1 pont), $MM^* \neq E$ miatt nem is unitér (1 pont), de mivel $M^*M = MM^*$, ezért normális (1 pont). $A(v) = (3+i, -i, 3i+1)^T$ (1 pont), így $\langle v, A(v)\rangle = 3(3+i) + \overline{(-i)}(-i) + 1(3i+1) = 11+6i$ (1 pont).

2. A mátrix $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek 9 és -4 (2 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$9\Big(\frac{3x+2y}{\sqrt{13}}\Big)^2 - 4\Big(\frac{-2x+3y}{\sqrt{13}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

3. A karakterisztikus polinom $x^4 - x^3$ (1 pont), a sajátértékek 0 és 1 (1 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x-1)$, $x^2(x-1)$, $x^3(x-1)$. Ezekbe a mátrixot helyettesítve adódik, hogy a minimálpolinom $x^3 - x^2$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 0-hoz, illetve 1-hez tartozó blokk 2×2-es, illetve 1×1-es (1 pont). Mivel a 0 háromszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért a még szereplő 1×1-es blokkban 0 a sajátérték, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

4. Mivel $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$ (1 pont), ezért a feltételből $\langle v,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)$ (2 pont). Hasonló átalakítással a bizonyítandó állítás azzal ekvivalens, hogy $\langle v,v\rangle = 2\langle v,u\rangle$ (1 pont). Ezért az állítás igaz valós fölött, komplex fölött viszont nem, ellenpélda pl. $\mathbb{C}^1$-ben $u = 1$ és $v = 1-i$ (2 pont).

5. A W elemeit nyilván az $x+u = y+v = 0$ feltétel jellemzi, ezért például $b_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0)$ és $b_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ megfelelő ONB ebben az altérben (3 pont). Gram-Schmidt eljárással folytatva ha $v = (1,2,3,4)$, akkor $b = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \langle b_2, v\rangle b_2 = (2,3,2,3)$ (2 pont), a keresett távolság $\|b\| = \sqrt{26}$ (1 pont).

6. Például

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A minimálpolinomok $x^4 - 1$, illetve $x^2 - 1$ (4+2 pont). (Forgatásokat tartalmazó 2×2-es, és ± 1-et tartalmazó 1×1-es blokkokkal érdemes próbálkozni a tanult tétel szerint.)