Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi, B változat (2014. március 18.) — eredmények és pontozás

1. Mivel F a $+30$ fokos forgatás, ezért F^{21} a -90 fokos forgatás (1 pont). A T tengelyes tükrözés, így $T^{21} = T$ (1 pont). A szokásos bázisban $[F^{21}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $[T^{21}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (1+1 pont), így $[T^{21}F^{21}] = [T^{21}][F^{21}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont), és $(1,3)$ képe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (1 pont).

2. A B nem lineáris, mert ha $v = x^2$, akkor $B(2v) = 16$, ami nem egyenlő $2B(v) = 8$-cal (2 pont). Az A lineáris (0 pont), a szokásos $(1, x, x^2)$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

3. A W_2 nem altér, mert $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ benne van, de az összegük nincs (2 pont). A W_1 elemei azok az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixok, melyekre $a + 2b + c + 2d = 0$ (1 pont). Ezek között $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ bázist alkot (a függetlenség és a generátorrendszer-tulajdonság ellenőrzése 1+1 pont). Ezért a dimenzió 2 (1 pont). *Megjegyzés:* Mivel W_1 valódi altere $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek, dimenziója legfeljebb 3 a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt. Ezért elég a fenti három mátrix függetlenségét bizonyítani. *Második megoldás:* Tekintsük azt az A lineáris leképezést $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ből $\mathbb{R}$-be, mely M-hez az $(1,1)M(1,2)^T$ számot rendeli. Ennek képtere az egész $\mathbb{R}$, mert például az egységmátrix képe nem nulla (így a képtér sem nulla, de más altér $\mathbb{R}$-ben nincs). Mivel W_1 ennek a magtere, ezért ez altér, és a dimenziótétel miatt a dimenziója $4 - 1 = 3$.

4. Bázistranszformációt végzünk: $S = \big[[1]_{(1,x)}, [1-x]_{(1,x)}\big] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3 pont), ennek inverze $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont), az edmény $S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (2 pont). *Második megoldás:* $C(1) = 1 + x$ és $C(1-x) = C(1) - C(x) = 1 + x - 1 = x$ (2+2 pont). De $1 + x = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (1-x)$ és $x = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (1-x)$, ezért a fenti mátrixot kapjuk (2 pont).

5. A három vektor lineárisan összefügg: a $\lambda_1(b_1 + 2b_2) + \lambda_2(4b_1 - b_3) + \lambda_3(7b_1 + 6b_2 - b_3) = 0$ egyenletet a b_i-k szerint rendezve minden együttható nulla, az eliminációt elvégezve például $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ nemtriviális megoldás (3 pont). Ezért a rang legfeljebb 2 (1 pont). De (például) az első két vektor független, mert egyik sem nulla, és az elsőnek nem skalárszorosa a második: $\lambda(b_1 + 2b_2) = (4b_1 - b_3)$-ból a b_3 együtthatóját nézve ellentmondást kapunk. Ezért a rang 2 (2 pont).

6. Egészítsük ki a $b_1 = (1,2,3)^T$ vektort $\mathbb{R}^3$ egy bázisává (például $b_2 = (1,0,0)^T$ és $b_1 = (0,1,0)^T$ megfelelő, hiszen ez három független vektor). Az előírhatósági tétel miatt A egyértelműen megadható az $A(b_1) = 0$, $A(b_2) = b_1$, $A(b_3) = b_2$ összefüggésekkel. Itt a képtér $\langle b_1, b_2 \rangle$, ami tartalmazza a megteret, amit b_1 generál.