Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi, A változat (2014. március 18.) — eredmények és pontozás

1. Mivel F a $+60$ fokos forgatás, ezért F^{21} a 180 fokos forgatás (1 pont). Mivel T tengelyes tükrözés, $T^{21} = T$ (1 pont). A szokásos bázisban tehát $[F^{21}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $[T^{21}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), így $[T^{21}F^{21}] = [T^{21}][F^{21}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont) és $(3,1)$ képe $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1 pont).

2. Az A nem lineáris, mert ha $v = x^2$, akkor $A(2v) = 16x$, ami nem egyenlő $2A(v) = 8x$-szel (2 pont). A B lineáris (0 pont), a szokásos $(1, x, x^2)$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

3. A W_2 nem altér, mert $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ benne van, de az összegük nincs (2 pont). A W_1 elemei azok az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixok, melyekre $a + c = 0 = b + d$ (1 pont). Ezek között $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bázist alkot (a függetlenség és a generátorrendszer-tulajdonság ellenőrzése 1+1 pont). Ezért a dimenzió 2 (1 pont).

4. Bázistranszformációt végzünk: $S = \big[[1 + x]_{(1,x)}, [x]_{(1,x)}\big] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3 pont), ennek inverze $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), az edmény $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 pont). *Második megoldás:* $C(1+x) = C(1)+C(x) = x+(1+x) = 2x+1$ és $C(x) = 1+x$ (2+2 pont). De $2x+1 = 1\cdot(1+x)+1\cdot x$ és $1 + x = 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot x$, ezért a fenti mátrixot kapjuk (2 pont).

5. A három vektor lineárisan összefügg: a $\lambda_1(2b_1 + b_2) + \lambda_2(3b_1 + b_3) + \lambda_3(7b_1 + 2b_2 + b_3) = 0$ egyenletet a b_i-k szerint rendezve minden együttható nulla, az eliminációt elvégezve például $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ nemtriviális megoldás (3 pont). Ezért a rang legfeljebb 2 (1 pont). De (például) az első két vektor független, mert egyik sem nulla, és az elsőnek nem skalárszorosa a második: $\lambda(2b_1+b_2) = (3b_1+b_3)$-ból a b_3 együtthatóját nézve ellentmondást kapunk. Ezért a rang 2 (2 pont).

6. Egészítsük ki a $b_1 = (1, 2, 3)^T$ vektort $\mathbb{R}^3$ egy bázisává (például $b_2 = (1, 0, 0)^T$ és $b_1 = (0, 1, 0)^T$ megfelelő, hiszen ez három független vektor). Az előírhatósági tétel miatt A egyértelműen megadható az $A(b_1) = 0$, $A(b_2) = 0$, $A(b_3) = b_2$ összefüggésekkel. Itt a képtér $\langle b_2 \rangle$, ami része a magtérnek, mert $A(b_2) = 0$.