Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi, B változat (2014. május 13.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve (SG vagy KE) és hogy **B változat**. A dolgozat érdemjegye az összpontszám hatodrésze.

1. Tekintsük $\mathbb{C}^3$-on az

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ u_2 - iu_3 \\ iu_2 + u_3 \end{bmatrix},$$

transzformációt. Vizsgáljuk meg, hogy A normális-e, unitér-e, önadjungált-e, és számítsuk ki a $\langle v, A(v)\rangle$ skaláris szorzatot abban az esetben, amikor $v = (2, -i, 3)^T$.

2. Határozzuk meg az $7x^2+12xy+2y^2$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

3. Mi lesz a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix minimálpolinomja és Jordan-alakja?

4. Legyenek u és v vektorok egy euklideszi térben. Igaz-e valós, illetve komplex fölött, hogy ha $\|u+v\| = \|2v\|$, akkor $u-3v$ ortogonális $u+v$-re? (Ha valamelyik nem teljesül, akkor indoklásképpen ellenpéldát is kell adni.)

5. Álljon W azon (x, y, u, v) pontokból $\mathbb{R}^4$-ben, melyekre $x-y-u+v=0$ és $x-y+u-v=0$. Adjunk meg egy ortonormált bázist a W altérben, valamint az $(4, 2, 1, 3)$ pont távolságát ettől az altértől.

6. Adjunk meg egy olyan $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ortogonális mátrixot, melyek nyoma (a főátlóban álló elemek összege) 3, és a minimálpolinomja harmadfokú.