Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi, B változat (2014. március 18.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve (SG vagy KE). A dolgozat érdemjegye az összpontszám hatodrésze.

1. Legyen T a síkon az $y = -x$ egyenesre való tükrözés, F pedig forgatás az origó körül $+30$ fokkal. Mi $T^{21}F^{21}$ mátrixa (a szokásos bázisban), és hová viszi ez az $(1,3)$ pontot?

2. Legyen V a legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok (és a 0) $\mathbb{Q}$ feletti vektortere, továbbá $A, B : V \to V$, ahol

a) $A(f) = f(1) + 3f(x)$;

b) $B(f) = f''(x)^2$ (a vessző deriváltat jelöl).

Amelyik nem lineáris transzformáció A és B közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázispárban (de ne igazoljuk, hogy lineáris).

3. Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, továbbá

a) $W_1 = \{M \in V \,:\, (1,1)M(1,2)^T = 0\}$;

b) $W_2 = \{M \in V \,:\, M\text{-nek van három egyenlő eleme}\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (de ne igazoljuk, hogy altér). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

4. Legyen V a legfeljebb elsőfokú, valós együtthatós polinomok (és a 0) $\mathbb{R}$ feletti vektortere. Ha $C \in \mathrm{Hom}(V)$ mátrixa az $(1, x)$ bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mi C mátrixa az $(1, 1-x)$ bázisban?

5. Egy vektortérben $\{b_1, b_2, b_3\}$ bázis. Határozzuk meg a $\{b_1 + 2b_2, 4b_1 - b_3, 7b_1 + 6b_2 - b_3\}$ vektorrendszer rangját.

6. Készítsünk $\mathbb{R}^3$-ön olyan lineáris transzformációt, melynek képtere tartalmazza a magterét is és az $(1,2,3)^T$ vektort is.