Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2014. júl. 3.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy T test fölötti vektortér egy W részhalmaza zárt a skalárral szorzásra.

$(\forall w \in W)(\forall \lambda \in T)(\lambda w \in W)$. *Vagy:* $w \in W$ és $\lambda \in T \Rightarrow \lambda w \in W$.

2. Definiáljuk a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangját a dimenzió fogalma segítségével.

$r(v_1, \ldots, v_n) = \dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, azaz a $v_1, \ldots, v_n$ által generált altér dimenziója.

3. Mondjuk ki a $\mathrm{Hom}(V, W)$ dimenzióját megadó képletet.

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$.

4. Definiáljuk az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ leképezés λ-hoz tartozó sajátalterét **a halmazos jelöléssel.**

$\{v \in V \,:\, A(v) = \lambda v\}$.

5. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

6. Mit jelent az, hogy a Jordan-alak **egyértelmű?** A választ a **hasonlóság** fogalmát felhasználva adjuk meg.

Két $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha Jordan-alakjuk a blokkok sorrendjétől eltekintve megegyezik. *Másképp:* Két Jordan-alakú komplex elemű mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha csak a blokkok sorrendjében térnek el.

7. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk, és hogy milyen bázisról van szó.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció távolságtartó.

$\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ minden v és w vektorra.

9. Mondjuk ki Sylvester tehetetlenségi tételét, arra is figyelve, hogy milyen bázisokról szól.

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely a V és W alterek direkt összegének egy speciális bázisát adja meg.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $b_{n+1}, \ldots, b_m$ bázis W-ben akkor $b_1, \ldots, b_m$ bázis $V \oplus W$-ben.