NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a,b) = (\lambda\,|a|\,, \lambda\,|b|)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$, $\lambda = 1$, $v = (1,1)$, $w = (-1,-1)$. (Vagy $1 \cdot v = v$; $v = (-1. -1)$.)

12. Adjuk meg $\mathbb{R}[x]$ egy részhalmazát, mely $\mathbb{Q}$ fölött kétdimenziós altér, de $\mathbb{R}$ fölött nem altér.

Pl. $\{ax + b \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

13. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy négyelemű polinomhalmazt úgy, hogy a kételemű részhalmazok közül pontosan négy legyen lineárisan összefüggő.

Pl. $\{0, 1, 2, x\}$.

14. Hány dimenziós $\mathbb{R}^{3\times 3}$-ban az az altér, amely azokból az M mátrixokból áll, melyekre $(0,1,0)M = (0,0,0)$?

6

15. Adjunk példát olyan $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ nem nulla mátrixokra, melyekre $r(M+N) = r(M) + r(N)$.

Pl. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a D, L, S, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(D) A összegtartó.
(L) A skalárszorostartó.
(S) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v+w) = \quad \boxed{\text{S}}$$

$$\lambda\big(A(v+w)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$

$$\lambda\big(A(v) + A(w)\big) = \quad \boxed{\text{N}}$$

$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(A(w)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

18. Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ rangja 1, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A+B)$ lehetséges értékei?

$2, 3, 4$

19. Ha $A^2 + A = 2I$, akkor mik A lehetséges sajátértékei?

1 és -2.

20. Egy $\mathbb{R}^{5\times 5}$-beli mátrix minimálpolinomja x^2. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

1 vagy 2.

21. Ha az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^3, akkor mi lehet $A + I$ minimálpolinomja?

$(x-1)^3$

22. Mi az yz-síkra való tükrözés determinánsa?

-1

23. Ha $a^2 + b^2 = 1$ és $c^2 + d^2 = 2$, akkor maximum mennyi lehet $a + bc + d$ értéke?

$\sqrt{6}$
$(a = \sqrt{2/3},\ d = \sqrt{3/2})$

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Minden $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ és $v \in \mathbb{C}^2$ esetén $Mv = \lambda v \Rightarrow M^* v = \overline{\lambda} v$."

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

25. A $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix mikor diagonalizálható komplex felett ONB-ben?

Minden $b \in \mathbb{C}$-re.

26. Ha A unitér, akkor mik $\det(AA^*)$ lehetséges értékei?

1

27. Adjunk meg egy olyan ortogonális mátrixot, melyben a főátlóbeli elemek összege $\sqrt{3} + 1$.

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Adjuk meg a síkon az $y = x$ egyenesre való függőleges vetítés egydimenziós invariáns altereit.

Az $y = x$ egyenes és az y-tengely.

29. Adjuk meg a térben az $(1, 1, -1)$ és $(1, -1, 1)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(0, 1, 1)$.

30. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix determinánsa pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit."

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.